

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XII-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

 Prof. *Mihaela Berindeanu*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x^2} \sin x dx + 6 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{x^4} \sin x dx$	1 punct
$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{x^3}\right)' \sin x dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{2 \sin x}{x^3} \sin x \Big _{\pi}^{2\pi} + 2 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos x}{x^3} dx =$	3 puncte
$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx - \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{x^2}\right)' \cos x dx = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx - \frac{\cos x}{x^2} \Big _{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx = -\frac{\cos x}{x^2} \Big _{\pi}^{2\pi} =$ $= -\frac{5}{4\pi^2}$	3 puncte

Subiectul 2.

 Prof. *Marcel Țena*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x, y \in H_n$. Cum $(xy)^n = x^n y^n = e \cdot e = e$, rezultă că $xy \in H_n$	2 puncte
Dacă $x \in H_n$, atunci $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$, deci $x^{-1} \in H_n$	2 puncte
b) Fie H un subgrup finit cu n elemente al lui G . Cum $x^n = e, \forall x \in H$, rezultă că $x \in H_n$, deci $H \subset H_n$	2 puncte
Deoarece $n = H \leq H_n \leq n$, rezultă $ H_n = n$ și $H = H_n$	1 punct

Subiectul 3.

 Gazeta Matematică nr. 10/2012, prof. *Marian Andronache*, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $a \in G \setminus Z(G)$ și $C(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$. Cum $C(a)$ este subgrup al lui G și $C(a) \neq G$ (în caz contrar $a \in Z(G)$, fals), rezultă din teorema lui Lagrange că $ C(a) \leq G /2$	3 puncte
Deoarece $Z(G)$ este subgrup al lui $C(a)$ și $Z(G) \neq C(a)$ (în caz contrar $a \in Z(G)$, fals), rezultă că $ Z(G) \leq C(a) /2$, deci $ Z(G) \leq G /4$	2 puncte
b) Fie grupul $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ cu $ G = 8$	1 punct
Atunci $Z(G) = \{I_3, A\}$, unde A se obține pentru $a = c = \hat{0}, b = \hat{1}$, deci $ Z(G) = 2$.	1 punct

Subiectul 4.

 Prof. *Dan Marinescu*, Hunedoara

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $0 \leq \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x}{\cos^{n-1} x} dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x \cos x dx \leq \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^n x dx =$	1 punct
$= \int_0^1 \frac{t^n}{t^2 + 1} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, deci limita cerută este 0	2 puncte
b) Fie $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ și $P = \min\{g(x) \mid x \in [a, b]\}$. Dacă $M \in (0, 1]$, atunci, pentru $n \geq 1, c_{n+1} - c_n = \int_a^b f^n(x)g(x)(f(x) - 1)dx \leq 0$, deci șirul este descrescător	1 punct
Cum $c_n \geq 0, n \geq 1$, rezultă că șirul este convergent	1 punct
Dacă $M > 1$, alegem $\alpha \in (1, M)$. Din continuitatea funcției f există $u, v \in [a, b], u < v$, astfel încât $f(x) \geq \alpha, x \in [u, v]$.	1 punct
Atunci $c_n \geq \int_u^v f^n(x)g(x)dx \geq \alpha^n P(v - u)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$	1 punct

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XII-A
SUBIECTELE

Problema 1. Să se calculeze

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x^2 + 6}{x^4} \sin x \, dx.$$

Problema 2. Fie (G, \cdot) un grup abelian cu elementul neutru e . Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm mulțimea $H_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Să se arate că:

- a) H_n este subgrup al lui G , oricare ar fi numărul natural nenul n .
- b) Dacă pentru fiecare număr natural nenul n mulțimea H_n are cel mult n elemente, atunci subgrupurile finite ale lui G sunt mulțimile H_n , cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Pentru un grup (G, \cdot) , notăm

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}.$$

- a) Să se arate că, dacă (G, \cdot) este un grup finit necomutativ, atunci

$$|Z(G)| \leq \frac{1}{4} |G|.$$

- b) Să se dea exemplul de grup finit G pentru care $|Z(G)| = \frac{1}{4} |G|$.

Notă. $|M|$ reprezintă numărul elementelor mulțimii finite M .

Problema 4. a) Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x}{\cos^{n-1} x} \, dx.$$

- b) Se consideră funcțiile continue $f, g : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că șirul cu termenul general

$$c_n = \int_a^b f^n(x)g(x)dx, \quad n \geq 1$$

are limită.

*Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore*