Olimpiada naţională de matematică

etapa locală
28.02.2015

Clasa a VII-a

1. a) Se dau numerele $a=\sqrt{\frac{1444}{361}}$; $b=\left(2\sqrt{27}+3\sqrt{50}-3\sqrt{45}\right):\left(2\sqrt{12}+5\sqrt{8}-3\sqrt{20}\right)$.

Arătaţi că numărul $a\cdot b+1$ este pătrat perfect.

b) Determinaţi cardinalul mulţimii $A=\left\{\overline{xyzt}/\ \frac{x+1}{y}=\frac{y-2}{z}=\frac{z+4}{t}=\frac{t-3}{x}\right\}$

2. a) Determinaţi tripletele (a; b; c) de numere întregi care verifică relaţia

$$a^2+a+|b+3|+\left(c^2-1\right)^2\le 0$$

b) Aflaţi valoarea numărului $x=\sqrt{\left(5^n-2015\right)^2}-\sqrt{\left(2014-5^n\right)^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Fie triunghiul ABC echilateral şi $D,E\in(BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAD)=m(\sphericalangle CAE)=20°$, $F\in(AD), G\in(AE)$ cu $m(\sphericalangle ABF)=m(\sphericalangle CBG)=20°$, iar $I\in(AE)$ cu $\sphericalangle ABI\equiv\sphericalangle CBI$.

a) Demonstraţi că FI || BC

b) Dacă $AD\cap BG=\{H\}$, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului FGH.

Gazeta Matematică 11/2013

4. Se dă pătratul ABCD de centru O. Pe dreapta AB se ia punctul E astfel încât $B\in(AE)$ $m(\sphericalangle OEB)=30°$. Perpendiculara în O pe OE intersectează dreapta BC în F. Arătaţi că:

a) Triunghiul EOF este isoscel

b) $[OE]\equiv[AB]$

Notă: Timp de lucru 2 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
SUCCES!

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Barem de corectare

1. a)	$a = 1$	**1 p**
	$b = \frac{3}{2}$	**1 p**
	$ab + 1 = 4 = 2^2$	**2 p**
1. b)	$\frac{x+1}{y} = \frac{y-2}{z} = \frac{z+4}{t} = \frac{t-3}{x} = 1.$	**1 p**
	$y = x+1; z = x-1; t = x+3$	**1 p**
	Cum x; y; z; t nu pot fi nule, avem $x \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$, deci card A = 5	**1 p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2.	$a^2 + a = a(a+1)$ şi produsul oricăror două numere întregi consecutive este nenegativ	**1 p**
	$\|b+3\| \geq 0;\ (c^2-1)^2 \geq 0,\ \forall\, b,c \in Z$	**1 p**
	Din inegalitatea din enunţ se obţine $a(a+1) = 0;\ b+3 = 0;\ c^2 - 1 = 0$	**1 p**
	$(a;b;c) \in \{(0;-3;-1);(0;-3;1);(-1;-3;-1);(-1;-3;1)\}$	**1 p**
	$x = \|5^n - 2015\| - \|2014 - 5^n\|$	**1 p**
	$\text{Pt. } n \in \{0;1;2;3;4\} \Rightarrow x = (-5^n + 2015) - (2014 - 5^n) = 1$	**1 p**
	$\text{Pt. } n \geq 5 \Rightarrow x = (5^n - 2015) - (-2014 + 5^n) = -1$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3. a)	Triunghiul AFB isoscel, deci FA = FB	
	$\Delta AFC \equiv \Delta BFC\ (LUL) \Rightarrow \sphericalangle(ACF) \equiv \sphericalangle BCF$	**1 p**
	$\Leftrightarrow$ (CF bisectoare pt. $\sphericalangle ACD \overset{T.Bis.}{\Rightarrow} \frac{AF}{FD} = \frac{AC}{CD}$ (1)	
	(BI bisectoare pt. $\sphericalangle ABE$ in $\Delta ABE \overset{T.bis.}{\Rightarrow} \frac{AI}{IE} = \frac{AB}{BE}$ (2)	**1 p**

	$\Delta ABE \equiv \Delta ACD\ (ULU) \Rightarrow BE = CD\ (3)$	**1 p**
	Din $(1),(2),(3)$ si $AB = AC \Rightarrow \frac{AF}{FD} = \frac{AI}{IE} \overset{R.T,Thales}{\Rightarrow} FI \parallel BC$	**1 p**
3. b)	b) ΔAGB isoscel $\Rightarrow GA = GB$ şi $m(\sphericalangle AGB) = 100°$	**1 p**
	$\Delta AFG \equiv \Delta BFG\ (LLL) \Rightarrow m(\sphericalangle HGF) = 50°$	
	$\sphericalangle HGF$ exterior $\Delta AFG \Rightarrow m(\sphericalangle AGB) = 20° + 50° = 70°$	**1 p**
	$m(\sphericalangle HGF) = 60°$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**
4. a)	$m(\sphericalangle OBE) = m(\sphericalangle OCF) = 135°$	**1 p**
	$m(\sphericalangle BOE) = m(\sphericalangle COF) = 15°$	**1 p**
	$OB = OC$	
	$\Delta OBE \equiv \Delta OCF\ (ULU) \Rightarrow OE = OF \Leftrightarrow \Delta EOF$ isoscel	**2 p**
4. b)	Construim $OM \perp AB,\ M \in (AB)$	**1 p**
	OM mediană corespunzătoare ipotenuzei în ΔAOB dreptunghic în O	**1 p**
	$\Rightarrow OM = \frac{AB}{2}\ (1)$	
	În ΔEOM, din $T30^\circ \Rightarrow OM = \frac{AB}{2}\ (2)$	**1 p**
	Din (1) şi (2) avem AB = OE	
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**

Subiecte propuse de prof. REBIC CAMELIA – Şcoala Gimnazială „Lucian Blaga" Satu Mare