INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 14 februarie 2015

Barem Clasa a VI-a

Notă: Orice altă rezolvare corectă se notează cu punctajul maxim corespunzător problemei.

PROBLEMA 1

Fie a, b şi c trei numere naturale prime şi distincte, astfel ca $4a+6b+9c=105$.

a) Determinaţi valorile numerelor a, b şi c.

b) Dacă n este un număr natural impar, atunci arătaţi că numărul $2^{n+c}-2^{n+b}+2^{n+a}$ se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, unde a, b şi c sunt numerele determinate la punctul a).

(autor prof. Breda Francisc – Liceul de Artă „Ioan Sima" Zalău)

Soluţie

a) $a \vdots 3 \Rightarrow a=3$......*1 punct*

$2b+3c=31 \Rightarrow 3c \le 31 \Rightarrow c \in \{2,3,5,7\}$......*1 punct*

c impar, $c \ne a \Rightarrow c \in \{5,7\}$......*1 punct*

$c=5 \Rightarrow b=8$ compus

$c=7 \Rightarrow b=5$......*1 punct*

b) $n=2k+1 \Rightarrow 2^{n+c}-2^{n+b}+2^{n+a}=2^{2k+8}-2^{2k+6}+2^{2k+4}$......*1 punct*

$=2^{2k+4}\left(2^4-2^2+1\right)=\left(2^{k+2}\right)^2\cdot 13=\left(2^{k+2}\right)^2\cdot\left(2^2+3^2\right)=$......*1 punct*

$=\left(2^{k+3}\right)^2+\left(2^{k+2}\cdot 3\right)^2$......*1 punct*

PROBLEMA 2

Se consideră numerele:

$$A=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2016};\ B=\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2015}{2016}$$

a) Să se aratecă $A+B$ este un număr natural.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

b) Să se arate că $\frac{2013}{2} < B - A < 2013$.

(G.M. 12/2014-supliment cu exerciţii)

Soluţie

a) A+B= $(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})+\ldots\ldots(\frac{1}{2016}+\frac{2015}{2016})$……………………………………………….*2 puncte*

A+B = 1+1+……+1 (de 2013 ori) ……………………………………………….*1 punct*

Finalizare ………………………………………………………………………….*1 punct*

b) $\frac{2013}{2} < (\frac{3}{4}-\frac{1}{4})+(\frac{4}{5}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{2015}{2016}-\frac{1}{2016})$……………………………………….*2 puncte*

Finalizare………………………………………………………………………….*1 punct*

PROBLEMA 3

Pe o dreaptă se consideră punctele distincte A, B, C, D, M în această ordine astfel încât B este mijlocul segmentului $[AC]$, $[MD] \equiv [DC] \equiv [AC]$ şi $BD = 6cm$.

a) Calculaţi distanţa de la A la D.

b) Aflaţi lungimea segmentului $[AM]$

(propusă de Şcoala Gimnazială "Simion Bărnuţiu" Zalău)

Soluţie

a) Din B mijlocul lui (AC) rezultă AB = BC...*1 punct*

MD = DC = CA = 2BC ....*1 punct*

BD = BC + CD = BC + 2BC = 3BC, deci BC = 2 cm...*2 puncte*

AD = AC + CD = 4AB =8 cm ....*1 punct*

b) AM = 3AC = 3·2BC = 12cm ....*2 puncte*

PROBLEMA 4

În jurul unui punct sunt patru unghiuri consecutive AOB, BOC, COD, DOA astfel încât al doilea este dublul primului şi încă $20°$, al treilea este cu $10°$ mai puţin decât întreitul primului, iar al patrulea este de patru ori mai mare decât primul şi încă $30°$. Câte grade are fiecare unghi?

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

(Gazeta Matematică)

Soluţie

Notăm măsurile unghiurilor cu $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$

Atunci: $\hat{O}_2 = 2\hat{O}_1 + 20^0$; $\hat{O}_3 = 3\hat{O}_1 - 10^0$; $\hat{O}_4 = 4\hat{O}_1 + 30^0$ ....*1 punct*

Cu aceste notaţii avem: $170 = 5\hat{O}_1 + 10$...*2 puncte*

$\hat{O}_1 = 32^0$ ……………………………………………………………………………*1 punct*

$\hat{O}_2 = 64^0 + 20^0 = 84^0$; $\hat{O}_3 = 94^0 - 10^0 = 84^0$; $\hat{O}_4 = 128^0 + 30^0 = 158^0$ ………………………..2 *puncte*

Măsurile unghiurilor sunt:32°, 84°, 86°, 158°………………………………………*1 punct*