INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARGEŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2014
Clasa a VII-a

Varianta 2

SUBIECTE:

1. a) Dacă x, y, z, t $\in \mathbf{R}_+$ şi x + y + z + t = 1007, arătaţi că:

$$\sqrt{x(y+z+t)}+\sqrt{y(z+t+v)}+\sqrt{z(t+x+y)}+\sqrt{t(x+y+z)}\le 2014$$

b) Arătaţi că:

$$\frac{10}{17}<\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{17}<1\frac{1}{4}$$

(7puncte)

2. Se dau numerele $a=\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{7}{5\cdot 12}+\frac{11}{12\cdot 23}+...+\frac{47}{255\cdot 302}$ şi

b = 1 · 2 + 2 · 3 + 3 · 4 + … + 2013 · 2014 – ($1^2 + 2^2 + 3^2 + … + 2013^2$)

Stabiliţi dacă numărul $x=\sqrt{\left(\frac{151a}{3}\right)^{2014}+\left(\frac{b}{2015}\right)^{2013}}$ este număr iraţional.

(7puncte)

3. În patrulaterul convex ABCD se construieşte mediatoarea lui [BC] care intersectează pe [AD] în M. Dacă m(∢BMC) = 60^0, MB || CD şi CM || AB, să se determine măsura unghiului ascuţit format de diagonalele patrulaterului.

(7puncte)

E:14417 din GM 5/2013

4. Fie un triunghi ABC. Fie R pe semidreapta opusă lui (AB astfel încât AR = 2AB şi M mijlocul laturii AC. Considerăm punctele {T} = RM ∩ BC şi {L} = AT ∩ BM. Aflaţi raportul $\frac{LM}{LB}$.

(7puncte)

E: 14320 din GM 3/2012

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.

Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2014
Clasa a VII-a

Varianta 2

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. a) SOLUŢIE

a) Folosim inegaliatea mediilor $m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ 1p

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x(y+z+t)} &\leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \\ \sqrt{y(z+t+x)} &\leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \\ \sqrt{z(t+x+y)} &\leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \\ \sqrt{t(x+y+z)} &\leq \frac{x+y+z+t}{2} = \frac{1007}{2} \end{aligned}\right\}$$ 2p

Însumând cele 4 relaţii obţinem inegalitatea cerută. 1p

b)
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{17} < \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ &\frac{1}{17} < \frac{1}{9} < \frac{1}{8} \\ &\frac{1}{17} < \frac{1}{10} < \frac{1}{8} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{1}{17} = \frac{1}{17} < \frac{1}{8} \end{aligned}\right\}$$ 2p

Însumând cele 10 relaţii de mai sus obţinem:

$\frac{10}{17} < \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{17} < \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ 1p

2. SOLUŢIE

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{255} - \frac{1}{302}$ 1p

$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{302} = \frac{75}{151}$ 2p

$b = (1 \cdot 2 - 1^2) + (2 \cdot 3 - 2^2) + (3 \cdot 4 - 3^2) + \ldots + (2013 \cdot 2014 - 2013^2)$ 1p

$b = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2013 = 1007 \cdot 2013$ 2p

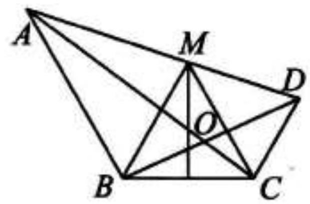
x este număr iraţional 1p

3. SOLUŢIE

Dacă M aparține mediatoarei lui [BC] și m(∢BMC) = 60^0, atunci AMBC este echilateral. 1p

MB || CD și CM || AB implică m(∢ABM) = m(∢BMC) = m(∢DCM) = 60^0 (alt. int.) 1p

dar și m(∢AMB) = m(∢MDC) (unghiuri corespondente).



De aici ΔAMB ~ ΔMDC și atunci $\frac{MB}{CD} = \frac{AB}{CM}$ 1p

Cum MB = MC = BC, obținem $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BC}$ 1p

Cum m(∢ABC) = m(∢BCD) = 120^0 ⇒ ΔACB ~ ΔBCD 1p

De aici m(∢CAB) = m(∢DBC), dar m(∢CAB) = m(∢MCA) (alt. int.)

⇒ m(∢MCO) = m(∢OBC) 1p

Cum m(∢MCO) + m(∢OCB) = 60^0, avem m(∢OBC) + m(∢OCB) = 60^0

de unde m(∢AOB) = 60^0 ca unghi exterior al triunghiului OBC. 1p

4. SOLUTIE

Desen 1p

Aplicăm Teorema lui Menelaus în triunghiul ABC pentru transversala R-M-T

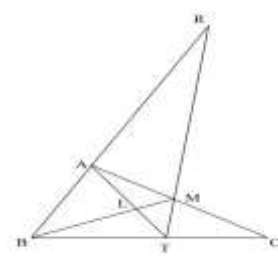
și obținem $\frac{CT}{TB} \cdot \frac{BR}{RA} \cdot \frac{AM}{MC} = 1$ 1p

de unde $\frac{CT}{TB} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{CT}{BT} = \frac{2}{3}$ 2p

Aplicăm Teorema lui Menelaus în triunghiul BMC pentru transversala A-L-T

și obținem $\frac{BT}{TC} \cdot \frac{CA}{AM} \cdot \frac{ML}{LB} = 1$ 1p

de unde $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{ML}{LB} = 1 \Rightarrow \frac{LM}{LB} = \frac{1}{3}$ 2p



Notă:

Orice altă soluție se punctează corespunzător.