OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 + 4A + 2013I_2 = \begin{pmatrix} 2018 & 7 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

Arătaţi că $(A - I_2)^p = O_2$, pentru orice număr natural $p \geq 2$.

Gabriela Ionică şi Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 2. Se consideră mulţimea G formată din toate matricele de ordin 3, cu elementele din mulţimea $\{-1,1\}$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, este egal cu -1.

a) Demonstraţi că numărul elementelor egale cu -1 ale unei matrice din G este 3, 5 sau 9.

b) Demonstraţi că dacă o matrice $A \in G$ este inversabilă, atunci $A^{-1} \notin G$.

c) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f : G \to \mathbb{R},\ f(X) = \det X$.

S.L.T.

Problema 3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - n\right)$.

[$***$]

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}$ şi $a_n = \frac{1}{n} - a_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Determinaţi valorile lui x pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 + 4A + 2013I_2 = \begin{pmatrix} 2018 & 7 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

Arătaţi că $(A - I_2)^p = O_2$, pentru orice număr natural $p \geq 2$.

Gabriela Ionică şi Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 2. Se consideră mulţimea G formată din toate matricele de ordin 3, cu elementele din mulţimea $\{-1,1\}$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, este egal cu –1.

a) Demonstraţi că numărul elementelor egale cu –1 ale unei matrice din G este 3, 5 sau 9.

b) Demonstraţi că dacă o matrice $A \in G$ este inversabilă, atunci $A^{-1} \notin G$.

c) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f : G \to \mathbb{R},\ f(X) = \det X$.

S.L.T.

Problema 3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \dfrac{k}{n^2}} - n \right)$.

[***]

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}$ şi $a_n = \dfrac{1}{n} - a_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Determinaţi valorile lui x pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 1. Din enunţ rezultă că $A^3 + 4A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{not}{=} B$. Se observă că $A \cdot B = B \cdot A$, de unde se obţine că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .... (2p)

Atunci $A^3 + 4A = \begin{pmatrix} a^3 + 4a & 3a^2b + 4b \\ 0 & a^3 + 4a \end{pmatrix}$, deci $a^3 + 4a = 5$ şi $b(3a^2 + 4) = 7$ .... (2p)

Obţinem $(a-1)(a^2 + a + 5) = 0$, cu singura soluţie reală $a = 1$, pentru care $b = 1$ .... (2p)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cum $(A - I_2)^2 = O_2$, rezultă $(A - I_2)^p = O_2$, $\forall\ p \geq 2$ ………... (1p)

Problema 2. **a)** O matrice $X \in G$ are un număr impar de elemente egale cu –1. Dacă presupunem că un singur element al lui X este egal cu –1, atunci produsul elementelor de pe liniile pe care nu se află acest element este 1, contradicţie. Dacă $X \in G$ are 7 elemente egale cu –1, ele sunt distribuite astfel încât două linii au numai –1, iar pe a treia este numai un element egal cu –1. Pe coloanele pe care nu se află acesta, produsul elementelor este egal cu 1, contradicţie .... (1p)

Exemple de matrice din G cu 3, 5 respectiv 9 elemente egale cu –1 .... (1p)

b) Presupunem că există $A \in G$ inversabilă astfel încât $A^{-1} \overset{not}{=} B \in G$; atunci $A \cdot B = I_3$

Soluţia 1: $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1$. Cum $a_{11}b_{11}$, $a_{12}b_{21}$, $a_{13}b_{31} \in \{-1,1\}$, rezultă că două dintre aceste trei produse sunt egale cu 1, iar al treilea cu -1. Înmulţind, rezultă $a_{11}b_{11}a_{12}b_{21}a_{13}b_{31} = -1$, absurd, întrucât $a_{11}a_{12}a_{13} = b_{11}b_{21}b_{31} = -1$

Soluţia 2: $A \cdot B = I_3 \Rightarrow a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0$. Cum $a_{11}b_{12}$, $a_{12}b_{22}$, $a_{13}b_{32} \in \{-1,1\}$, suma a trei numere impare nu poate fi 0, contradicţie

.... (2p)

c) Dacă adunăm elementele primei linii la elementele celei de-a doua şi respectiv la elementele celei de-a treia, pe a doua şi a treia linie se obţin numai numere pare. De pe fiecare din liniile a doua şi a treia se poate scoate factorul comun 2, deci $\det X$ este multiplu de 4.

Din dezvoltarea determinantului de ordin 3 rezultă $-6 \le \det X \le 6$, deci $\det X \in \{-4, 0, 4\}$ .... (2p)

Există matrice $X \in G$ cu $\det X$ egal cu –4, 0, 4 (exemple!), deci $\operatorname{Im} f = \{-4, 0, 4\}$ .... (1p)

Problema 3. Notăm $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \right)$. Deoarece $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{k}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$, pentru orice $k = \overline{1,n}$, rezultă că

$$\frac{k}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}} \le \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \le \frac{k}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$ .... (3p)

de unde, sumând pentru $k = \overline{1,n}$, obţinem $\frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}} \le a_n \le \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ .... (3p)

Aplicând criteriul cleştelui, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$ .... (1p)

Problema 4. Înmulţind cu $(-1)^k$ relaţia $a_k + a_{k-1} = \frac{1}{k}$, putem scrie:

$$(-1)^k a_k - (-1)^{k-1} a_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k}, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*$$

Sumând pentru $k = \overline{1,n}$, rezultă $(-1)^n a_n - a_0 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}$, de unde $a_n = (-1)^n \cdot (x - s_n)$,

unde $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .... (3p)

Folosind identitatea lui Catalan: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \ge 1$, rezultă că

$s_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$ şi $s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n} \to \ln 2$, deci $s_n \to \ln 2$ .... (2p)

Atunci $a_{2n} = x - s_{2n} \to x - \ln 2$ şi $a_{2n-1} = -(x - s_{2n-1}) \to \ln 2 - x$.

Prin urmare, $(a_n)_{n\ge 0}$ este convergent dacă şi numai dacă $x - \ln 2 = \ln 2 - x$, adică $x = \ln 2$ .... (2p)