OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a XI-a

1.Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare cu $a \geq b$, să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{B_n}$, unde A_n, B_n reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv de pe diagonala secundară a matricei A^n.

2.Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin: $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$.

a) Arătați că $a_n < 1, \forall\, n \geq 1$.

b) Calculați $\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n)$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n)^n$.

3.Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, astfel încât $\mathrm{Tr}(A) = 1$ și $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3} \cdot \det A$.
Demonstrați că: $\det\left(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2\right) = \sqrt{3}$.

4.Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător în care

$$x_1 > 0 \text{ şi } x_n{}^4 + 4x_n \geq x_n{}^2 + x_n{}^3 \cdot x_{n+1} + 4,\ \forall n \geq 1.$$

Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi aflaţi limita sa.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 şi 10 (1 punct din oficiu)
Timp de lucru: 3 ore

Soluţii clasa a XI-a:

1.Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

b) Dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare cu $a\geq b$, să se calculeze $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$, unde A_n, B_n reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală, respectiv de pe diagonala secundară a matricei A^n.

Soluţie:

1. a) Se demonstrează prin inducție matematică că $A^n=\begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & c^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n \end{pmatrix}$, unde

$a_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}$, $b_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

$b)$ $A_n=2a_n+c^n=(a+b)^n+(a-b)^n+c^n$ și

$B_n=2b_n+c^n=(a+b)^n-(a-b)^n+c^n, \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Deoarece $a\geq b\Longrightarrow a-b\geq 0$ și cum a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi concluzionăm:

1. $a,b,c>0,$
2. $a+b>c.$

$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)^n+(a-b)^n+c^n}{(a+b)^n-(a-b)^n+c^n}=1$, deoarece $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^n=0$.

2.Fie șirul $(a_n)_{n\geq1}$, definit prin: $a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}$.

a) Arătați că $a_n<1,\forall\, n\geq 1$.

b) Calculați $\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n)$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n)^n$.

Soluţie:

2. a) Deoarece $\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}$, $\frac{1}{n^2+2}<\frac{1}{n^2+1}$, … , $\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}$,
prin adunarea acestor inegalităţi se obține că:

$a_n<\frac{n}{n^2+1}$. Cum $\frac{n}{n^2+1}<1,\forall n\geq 1$, rezultă că $a_n<1,\forall n\geq 1$.

b)Avem inegalitățile:

$\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}$;

$\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+2}<\frac{1}{n^2+1}$;

. . . .

$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$;

După adunarea acestora obținem:

$\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+n} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+n} < n \cdot a_n < \frac{n^2}{n^2+n}$.

Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \ 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 1$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot a_n)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[(1 + na_n - 1)^{\frac{1}{na_n-1}}\right]^{n(na_n-1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n(na_n-1)}$.

Dar $n \cdot (na_n - 1) = n^2 a_n - n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2}{n^2+k} - 1\right) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$ și se obține:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} \leq \frac{n^2+n}{2n^2+2}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} = \frac{1}{2}$, de unde obținem că

$$\lim_{n\to\infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, astfel încât $\mathrm{Tr}(A) = 1$ și $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3} \cdot \det A$.
Demonstrați că: $\det\left(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2\right) = \sqrt{3}$.

Soluţie:

3. Fie $P = X^2 - X + d,\ d = \det A$ şi $\varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
$(\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = o)$. Atunci:
$\det(A^2 + A + I_2) = \det[(A - \varepsilon I_2)(A - \overline{\varepsilon} I_2)] = |\det(A - \varepsilon I_2)|^2 =$
$= |P(\varepsilon)|^2 = |\varepsilon^2 - \varepsilon + d|^2 = |-2\varepsilon - 1 + d|^2 = \left|d + i\sqrt{3}\right|^2 = d^2 + 3$.
Ținând cont că $\det(A^2 + A + I_2) \leq 2\sqrt{3}d$, din relaţia de mai sus obţinem că $d^2 + 3 \leq 2\sqrt{3}d$, de unde rezultă că: $\det A = \sqrt{3}$.
Cum $\mathrm{Tr}(A) = 1$, folosind teorema *Cayley-Hamilton*, obţinem:

$$A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2 = A \Rightarrow \det\left(A^2 + \sqrt{3} \cdot I_2\right) = \sqrt{3}.$$

4. Relaţia din enunţ este echivalentă cu: $x_n^3(x_n - x_{n+1}) \geq x_n^2 - 4x_n + 4$, $\forall n \geq 1$.
Sau, $x_n^3(x_n - x_{n+1}) \geq (x_n - 2)^2$, $\forall n \geq 1$. De aici rezultă că $x_n^3(x_n - x_{n+1}) \geq 0$, $\forall n \geq 1$.
Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, deci $x_n - x_{n+1} > 0, \forall n \geq 1$, rezultă că $x_n^3 \geq 0$, $\forall n \geq 1$. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; trecem la limită în relaţia de recurenţă şi obţinem:
$l^4 - l^2 + 4l - 4 \geq l^4 \Rightarrow (l-2)^2 \leq 0 \Rightarrow l = 2$.

Barem de corectare

Clasa a XI-a

Problema 1	**Oficiu 1 p**
a) Inducție matematică	3p
b) $A_n = 2a_n + c^n = (a+b)^n + (a-b)^n + c^n$	1p
$B_n = 2b_n + c^n = (a+b)^n - (a-b)^n + c^n$	1p
Deoarece $a \geq b \Rightarrow a-b \geq 0$ și cum a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi: 1. $a, b, c > 0$, 2. $a+b > c$	1p
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c}{a+b}\right)^n = 0$	1p
$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)^n + (a-b)^n + c^n}{(a+b)^n - (a-b)^n + c^n} = 1$	2p
TOTAL	**10p**

Problema 2	**Oficiu 1 p**
a) $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2+1}, \dots, \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2+1}$	1p

$a_n < \frac{n}{n^2+1}$	1p
Finalizare: $a_n < 1, \forall n \geq 1$.	1p
b) $\frac{n}{n^2+n} < a_n < \frac{n}{n^2+n}$	1p
Finalizare: $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 1$.	1p
c) $\lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n(na_n - 1)}$	1p
$n \cdot (na_n - 1) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$	1p
$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1}$	1p
Finalizare: $\lim_{n\to\infty} (na_n)^n = e^{-\frac{1}{2}}$	1p
TOTAL	**10p**

Problema 3	**Oficiu 1 p**
$P = X^2 - X + d,\ d = \det A$ şi $\varepsilon = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	1p
$\det(A^2 + A + I_2) = d^2 + 3$.	5p
$d^2 + 3 \leq 2\sqrt{3}d$	1p
Finalizare	2 p
TOTAL	**10p**

Problema 4	**Oficiu 1 p**
${x_n}^3(x_n - x_{n+1}) \geq (x_n - 2)^2,\ \forall n \geq 1$	2p
${x_n}^3(x_n - x_{n+1}) \geq 0,\ \forall n \geq 1$.	1p
$(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător	1p
${x_n}^3 \geq 0,\ \forall n \geq 1$	1p
Fie $l = \lim_{n\to\infty} x_n$; trecem la limită în relaţia de recurenţă	1p
$l^4 - l^2 + 4l - 4 \geq l^4 \Rightarrow (l-2)^2 \leq 0$	2p

Finalizare : $l = 2$	1p
TOTAL	**10p**