Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A XI - A

15 februarie 2015

1. Se consideră matricele $A, B \in M_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\alpha AB + A + B = 0_n$.
   a) Să se arate că $(\alpha A + I_n)(\alpha B + I_n) = I_n$.
   b) Să se arate că $AB = BA$.

2. a) Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(\ln(n+x) - \ln n)$.

   Să se arate că șirul $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ este convergent.

   b) Dacă $a_n = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x + 3^x + \cdots + n^x}{n-1}\right)^{\frac{1}{x}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$ să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

   Supliment GM

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $M_n(a,b)$ mulțimea matricelor pătratice de ordinul n având toate elementele din mulțimea $\{a,b\}$. Dacă $\det(A) \geq 0$ pentru orice $A \in M_n(a,b)$, să se arate că $a = b$.

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale pozitive cu proprietatea că $x_{2n} + \frac{1}{x_n} \leq 2$ pentru orice $n \geq 1$.

a) Să se arate că $x_{2n} \leq x_n$ pentru orice $n \geq 1$.

b) Să se arate că $x_n \geq 1$ pentru orice $n \geq 1$.

c) Rezultă în mod necesar că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent? Justificare.

NOTĂ. Timp de lucru 3 ore

Fiecare subiect se notează cu 7 puncte

MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

CLASA A 11 A

Soluții și barem de corectare

1. a) calcul direct (3p)

b) din a) rezultă că $\det(\alpha A+I_n)\neq 0$ deci $\alpha A+I_n$ este inversabilă și obținem $\alpha B+I_n=(\alpha A+I_n)^{-1}$ (2p)

De aici deducem că $(\alpha B+I_n)(\alpha A+I_n)=I_n,$ de unde $\alpha BA+B+A=0_n,$ de unde $AB=BA$ (2p)

2. a) $a_n=\dfrac{1}{n}$ (1p)

$(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător și mărginit superior, deci convergent (2p)

b) $a_n=\sqrt[n-1]{n!}$ (2p)

finalizare (2p)

3. Fie $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ cu $a_{ii}=b$ dacă $i\in\{2,...,n\}$ și $a_{ij}=a$ altfel. Atunci $\det(A)=a(b-a)^{n-1}\geq 0$ (2p)

Dacă A' este matricea obținută prin interschimbarea a două linii ale lui $A,$ atunci $A'\in M_n(a,b)$ și deci $\det(A')=-\det(A)\geq 0$. Așadar $a(b-a)^{n-1}=0$ (2p)

În mod analog (prin interschimbarea lui a cu b) se obține că $b(a-b)^{n-1}=0$ (2p)

Din aceste relații rezultă că $a=b$ (1p)

4. a) cum $x_{2n}\leq 2-\dfrac{1}{x_n},n\geq 1,$ este suficient să arătăm că $2-\dfrac{1}{x_n}\leq x_n \Leftrightarrow (x_n-1)^2\geq 0,n\geq 1$ (2p)

b) Să presupunem că există $n_0\in\mathbb{N}^*$ cu $x_{n_0}<1.$ Definind șirul $y_n=x_{2^n\cdot n_0},n\in\mathbb{N},$ se obține că $y_{n+1}+\dfrac{1}{y_n}\leq 2,n\in\mathbb{N}.$ Din a) rezultă că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător și cum $y_n>0,n\in\mathbb{N}$ se obține că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și fie l limita acestuia. Trecând la limită în relația $y_{n+1}\cdot y_n+1\leq 2y_n,n\in\mathbb{N},$ deducem că $l=1,$ contradicție (3p)

c) Nu în mod necesar. De exemplu $x_n=2-(-1)^n,n\geq 1,$ verifică cerința fără a fi convergent (2p)