INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SATU MARE
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada naţională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a IX-a

1. Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ ce satisface simultan proprietățile:

a) $1 \in G$

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$

Arătați că $\sqrt{2015} \in G$ și $2014 \in G$.

2.

a) Arătați că $a + bc \leq \frac{a^2+b^2+c^2+1}{2}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$

b) $\dfrac{3(a^2+b^2)+2}{3(c+ab)} + \dfrac{3(b^2+c^2)+2}{3(a+bc)} + \dfrac{3(c^2+a^2)+2}{3(b+ac)} \geq 4, \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$

3. Se dă șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și relația $\frac{1^2}{a_1 \cdot a_2+1} + \frac{2^2}{a_2 \cdot a_3+1} + \cdots + \frac{n^2}{a_n \cdot a_{n+1}+1} = \frac{a_n+1}{8}, \forall n \geq 1$. Aflați termenii șirului.

4. Fie ΔABC și punctele $M \in (AB); N \in (AC)$. Notăm $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = S$ și $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} = P, \quad S, P \in \mathbb{R}^*$.
Arătați că dreapta MN trece prin mijlocul medianei AD al ΔABC, $D \in (BC)$ dacă și numai dacă $S = 2P$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.
Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.
SUCCES!

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Barem de corectare

1.	$1 \epsilon G \Rightarrow \sqrt{1+2}=\sqrt{3} \epsilon G \Leftrightarrow \sqrt{0+3} \epsilon G \Rightarrow 0+4=4 \epsilon G$	**1 p**
	Pres că $3k+1 \epsilon G \Rightarrow \sqrt{3k+1+2}=\sqrt{3k+3} \epsilon G \Rightarrow 3(k+1)+1 \epsilon G \Rightarrow 2014 = 3 \cdot 671 + 1 \epsilon G$	**1 p**
	Pe de altă parte $4 \epsilon G \Rightarrow \sqrt{4+2}=\sqrt{6} \epsilon G \Leftrightarrow \sqrt{3+3} \epsilon G \Rightarrow 3+4=7 \epsilon G$ $7 \epsilon G \Rightarrow \sqrt{7+2}=\sqrt{9}=3 \epsilon G$ $3 \epsilon G \Rightarrow \sqrt{3+2}=\sqrt{5} \epsilon G \Leftrightarrow \sqrt{2+3} \epsilon G \Rightarrow 2+4=6 \epsilon G$	**3 p**
	Pres că $3k \epsilon G \Rightarrow \sqrt{3k+2} \epsilon G \Leftrightarrow \sqrt{3k-1+3} \epsilon G \Rightarrow 3k-1+4=3(k+1) \epsilon G$ $2013 = 3 \cdot 671 \epsilon G \Rightarrow \sqrt{2013+2}=\sqrt{2015} \epsilon G$ **<u>G.M. 12/2014 – adaptare</u>**	**2 p**
	TOTAL Subiectul 1	**7 p**
2. a)	$a \le \frac{a^2+1}{2}$; $bc \le \frac{b^2+c^2}{2}$; $\forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ Prin adunarea inegalităților se obține relația de la a)	**2 p**
2. b)	Analog $\frac{3(b^2+c^2)+2}{3(a+bc)} \ge \frac{6(b^2+c^2)+4}{3(a^2+b^2+c^2+1)}$; $\frac{3(c^2+a^2)+2}{3(b+ac)} \ge \frac{6(c^2+a^2)+4}{3(a^2+b^2+c^2+1)}$	**1 p**
	Adunând relațiile se obține: $\frac{3(a^2+b^2)+2}{3(c+ab)}+\frac{3(b^2+c^2)+2}{3(a+bc)}+\frac{3(c^2+a^2)+2}{3(b+ac)}$ $\ge \frac{6(a^2+b^2)+4}{3(a^2+b^2+c^2+1)}+\frac{6(b^2+c^2)+4}{3(a^2+b^2+c^2+1)}+\frac{6(c^2+a^2)+4}{3(a^2+b^2+c^2+1)}=$ $=\frac{12(a^2+b^2+c^2)+12}{3(a^2+b^2+c^2+1)}=\frac{12(a^2+b^2+c^2+1)}{3(a^2+b^2+c^2+1)}=4$	**4 p**
	TOTAL Subiectul 2	**7 p**
3.	Pentru $n=1 \Rightarrow \frac{1^2}{a_2+1}=\frac{2}{4} \Rightarrow a_2=3$	**1 p**
	Pentru $n=2 \Rightarrow \frac{1^2}{a_1 \cdot a_2+1}+\frac{2^2}{a_2 \cdot a_3+1}=\frac{a_2+1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{4}{3a_3+1}=\frac{4}{8} \Leftrightarrow \frac{4}{3a_3+1}=\frac{2}{8} \Leftrightarrow 3a_3+1=16$ $\Rightarrow a_3=5$	**1 p**
	Presupunem că $a_n=2n-1$; $a_{n+1}=2n+1$ și demonstrăm prin inducție. $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{8}+\frac{(n+1)^2}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}+1}=\frac{a_{n+1}+1}{8}$ $\frac{2n-1+1}{8}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot a_{n+2}+1}=\frac{2n+2}{8}$	**3 p**
	$\frac{(n+1)^2}{(2n+1) \cdot a_{n+2}+1}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow (2n+1)a_{n+2}+1=4n^2+8n+4 \Leftrightarrow (2n+1)a_{n+2}=4n^2+8n+3 \Leftrightarrow$ $(2n+1)a_{n+2}=(2n+1)(2n+3)$ $a_{n+2}=2n+3$ Adev.	**2p**
	TOTAL Subiectul 3	**7 p**

4.	Notăm R mijlocului medianei AD. Notăm $\frac{AM}{MB} = x$, $\frac{AN}{NC} = y$ $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{AB}$	**1 p**
	$\frac{AN}{AC} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{AC}$	**1 p**
	$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{AC} \quad (1)$	**1 p**
	$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$	**1 p**
	$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AR} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{-4x+x+1}{4(x+1)}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$	**1 p**
	$\overrightarrow{MR} = \frac{1-3x}{4(x+1)}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \quad (2)$	**1 p**
	$\overrightarrow{MR}$ și $\overrightarrow{MN}$ sunt coliniari $\overset{(1),(2)}{\Longleftrightarrow} \frac{-\frac{x}{x+1}}{\frac{1-3x}{4(x+1)}} = \frac{\frac{y}{y+1}}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \frac{-x}{1-3x} = \frac{y}{y+1} \Leftrightarrow -xy - x = y - 3xy \Leftrightarrow 2xy = x + y \Leftrightarrow 2P = S$	**1 p**
	TOTAL Subiectul 4	**7 p**

Subiecte propuse de prof. BUD ADRIAN – Liceul Teoretic Negreşti Oaş