

INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

**ETAPA JUDEȚEANĂ**  
**9 martie 2013**



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera teoretică, profil umanist**

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A IX-A

1. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{a}{\sqrt{2}-1} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{2}+1}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

a) Determinați  $a$  și  $b \in \mathbb{Z}$ , astfel încât punctul  $M(\sqrt{2}+1, 5)$  să se afle pe graficul funcției  $f$ .

b) Cu  $a$  și  $b$  determinați mai sus găsiți punctele de pe grafic cu ambele coordonate numere raționale.

**Soluție:**

Condiția  $M(\sqrt{2}+1, 5) \in G_f$  dacă și numai dacă  $f(\sqrt{2}+1) = 5$  ..... 1p

Obține relația  $\sqrt{2}(2a+b) + 3a - b = 0$ ,  $a$  și  $b \in \mathbb{Z}$  ..... 2p

Deduce sistemul  $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a - b = 5 \end{cases}$  ..... 1p

Rezolvă sistemul și obține  $a = 1$ ,  $b = -2$  ..... 1p

$N(\alpha, \beta) \in G_f$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases}$  ..... 1p

Determină punctul  $N(2, 4)$  ..... 1p

2. Fie funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x}$ .

a) Să se calculeze  $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2013)$ .

b) Demonstrați că  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$ , oricare ar fi  $x, y \in (0, +\infty)$ ,  $x \neq y$ .

c) Stabiliți monotonia funcției  $f$ .

**Soluție:**

a) Calculează  $f(1), f(2), \dots, f(2013)$  ..... 1p

Găsește  $f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2013) = 2014$  ..... 1p

b) Obține  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{y-x}{xy(x-y)}$  ..... 2p

Deci  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = -\frac{1}{xy} < 0$ , oricare ar fi  $x, y \in (0, +\infty)$ ,  $x \neq y$  ..... 1p

c) Din  $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$  oricare ar fi  $x, y \in (0, +\infty)$ ,  $x \neq y$ , rezultă că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, +\infty)$  ..... 2p

3. a) Pe un lac crește o plantă care își dublează numărul de frunze zilnic. După 10 zile planta are 2048 de frunze. Să se determine numărul de frunze pe care l-a avut planta în a 5-a zi.  
 b) Într-un amfiteatru sunt 30 de rânduri de scaune, astfel încât pe fiecare rând sunt cu două locuri mai mult decât pe rândul din fața sa. Știind că pe al doilea rând sunt 18 scaune, să se determine numărul total de scaune din întreg amfiteatrul.

**Soluție:**

a) Pe „mers invers” stabilește câte frunze avea planta în prima zi.

$$2048 \rightarrow 1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256 \rightarrow 128 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \dots\dots\dots 1p$$

Așadar, numărul frunzelor plantei este în fiecare zi un termen al unei progresii geometrice cu primul termen  $b_1 = 4$  și rația  $q = 2$  ..... 1p

$$\text{În a 5-a zi, planta avea } b_5 = 4 \cdot 2^4 = 64 \text{ frunze} \dots\dots\dots 1p$$

b) În primul rând sunt 16 scaune ..... 1p

Numărul de scaune de pe fiecare rând, începând cu primul, este o progresie aritmetică cu  $a_1 = 16$  și  $r = 2$  ..... 1p

$$\text{Cum } a_{30} = 16 + 29 \cdot 2 = 74, \text{ rezultă } S_{30} = \frac{(16 + 74) \cdot 30}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Numărul total de scaune din tot amfiteatrul este 1350 ..... 1p

4. Fie triunghiul ABC cu  $M \in (BC)$  astfel încât  $\overline{MC} = -3\overline{MB}$ .

$$\text{Să se demonstreze că } \overline{AM} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC}$$

**Soluție:**

Figura ..... 1p

$$\text{Obține } 2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BM} + \overline{CM} \dots\dots\dots 1p$$

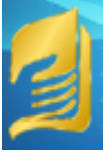
$$\text{Din } \overline{MC} = -3 \cdot \overline{MB} \Rightarrow \overline{BM} = \frac{1}{4}\overline{BC} \text{ și } \overline{CM} = -\frac{3}{4}\overline{BC} \dots\dots\dots 1p$$

$$2\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{BC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} \dots\dots\dots 1p$$

$$2\overline{AM} = \frac{3}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deduce } \overline{AM} = \frac{3}{4}\overline{AB} + \frac{1}{4}\overline{AC} \dots\dots\dots 1p$$



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ**  
**9 martie 2013**

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera teoretică, profil umanist**

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

**1.** Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 4m + 5$  și A punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa (Oy). Determinați valoarea minimă a lungimii segmentului [OA].

**Soluție:**

$G_f \cap (Oy) \Rightarrow x = 0$  și  $y = f(0) = m^2 - 4m + 5$  ..... 1p  
 Punctul de intersecție este  $A(0, m^2 - 4m + 5)$  ..... 1p  
 Lungimea segmentului [OA] este  $|OA| = |m^2 - 4m + 5|$  ..... 1p  
 Dar  $m^2 - 4m + 5$ , oricare ar fi  $m \in \mathbb{R}$  ( $\Delta < 0$ ) ..... 1p

$|OA| = |m^2 - 4m + 5|$ , iar  $\min(m^2 - 4m + 5) = -\frac{\Delta}{4a} = 1$  ..... 2p

Așadar, valoarea minimă a lungimii segmentului [OA] este 1 ..... 1p

Observație:

Ultimele 4 puncte se acordă și dacă scrie  $|OA| = |m^2 - 4m + 5| = (m - 2)^2 + 1 > 0$ , minimul expresiei atingându-se pentru  $m = 2$ . Valoarea minimă este 1.

**2.** Fie funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .

a) Demonstrați că  $f\left(\frac{4+9}{2}\right) > \frac{f(4)+f(9)}{2}$ .

b) Demonstrați că  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ ,  $a \neq b$ .

**Soluție:**

a)  $f\left(\frac{4+9}{2}\right) > \frac{f(4)+f(9)}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{13}{2}} > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 13 > \frac{25}{2}$  (adevărat) ..... 2p

b)  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b}{2}} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ ,  $a, b \in [0, +\infty)$ ,  $a \neq b$  ..... 2p

Inegalitatea este echivalentă cu:  $\frac{a+b}{2} > \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$  ..... 1p

$2(a+b) > a+b+2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} > 0$  ..... 1p

Obține  $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$  (adevărat) ..... 1p

3. a) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $\sqrt{x^2 - x - 2} = x - 2$ .

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $[\log_3(x+1)]^2 - 4\log_3(x+1) + 3 = 0$

**Soluție:**

a) Condiții de existență  $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$  ..... 1p

Obține  $x \in [2, +\infty)$  ..... 1p

Unica soluție a ecuației este  $x = 2$  ..... 1p

b) Condiție de existență:  $x + 1 > 0 \Rightarrow x \in (-1, +\infty)$  ..... 1p

Notează  $\log_3(x+1) = t \in \mathbb{R}$  ..... 1p

Obține ecuația  $t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3$  ..... 1p

$\log_3(x+1) = 1 \Rightarrow x_1 = 2; \log_3(x+1) = 3 \Rightarrow x_2 = 26$  ..... 1p

4. Într-o casierie sunt cel mult 35 de bancnote de 5 lei, cel mult 4 bancnote de 100 lei și cel mult 3 bancnote de 200 lei. Reușește casierita, folosind toate tipurile de bancnote, să plătească:

a) 1000 lei ?

b) 842 lei ?

**Soluție:**

a) Fie  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ , numărul bancnotelor de 200 lei, 100 lei și respectiv 5 lei, astfel încât:

$200m + 100n + 5p = 1000$  ..... 1p

Rezultă:  $40m + 20n + p = 200 \Rightarrow p \in \{10, 20, 30\}$  ..... 1p

**1.**

$p = 10 \Rightarrow 4m + 2n = 19$  (fals)

$p = 30 \Rightarrow 4m + 2n = 17$  (fals) ..... 1p

**2.**

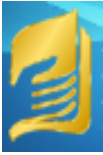
$p = 20 \Rightarrow 2m + n = 9 \Rightarrow n \in \{1, 3\}$  ..... 1p

Dacă  $n = 1 \Rightarrow m = 4$  (fals)

Dacă  $n = 3 \Rightarrow m = 3$  (fals) ..... 1p

Răspunsul este afirmativ, întrucât avem:  $200 \cdot 3 + 100 \cdot 3 + 5 \cdot 20 = 1000$  ..... 1p

b) Cu aceleași notații ar trebui să avem:  $200 \cdot m + 100 \cdot n + 5 \cdot p = 842 \Rightarrow 5 \cdot (40 \cdot m + 20 \cdot n + p) = 842$  (fals). Așadar, casierita nu poate plăti 842 lei în condițiile date ..... 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ  
9 martie 2013

Filiera teoretică, profil umanist



FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Un pensionar și-a făcut un depozit la o bancă depunând 10000 lei, depozit scadent la 3 luni cu prelungire automată și cu rata anuală unitară a dobânzii de 20%.
- Ce sumă avea în cont după 3 luni? Dar după 6 luni?
  - Știind că un prieten a depus tot 10000 lei (depozit scadent la un an) în același timp cu el, dar la altă bancă și ambii au scos după un an aceeași sumă de bani, să se afle rata anuală a dobânzii pentru cel din urmă.

### Soluție:

a) După trei luni:  $10000 \cdot \left(1 + \frac{20\%}{4}\right) = 10000 \cdot 1,05 = 10500$  lei ..... 2p

După șase luni:  $10000 \cdot \left(1 + \frac{20\%}{4}\right)^2 = 10000 \cdot 1,05^2 = 11025$  lei ..... 2p

b)  $10000 \cdot \left(1 + \frac{20\%}{4}\right)^4 = 10000 \cdot (1+r)$  ..... 2p

$1,05^4 = 1+r \Rightarrow r = 0,21550625$ ,  $r \cong 21,55\%$  ..... 1p

2. Pentru evaluarea rezultatelor obținute la teza la matematică de către elevii unei școli se face un sondaj de volum 35 printre elevii școlii, notele fiind înregistrate în tabelul alăturat.

<b>Nota</b>	4	5	6	7	8	9	10
<b>Frecvența (Nr. elevi)</b>	4	6	7	8	5	3	2

a) Reprezentați datele prin bare.

b) Calculați: media, dispersia și mediana pentru selecția considerată.

### Soluție:

a) Reprezentare cu bare ..... 2p

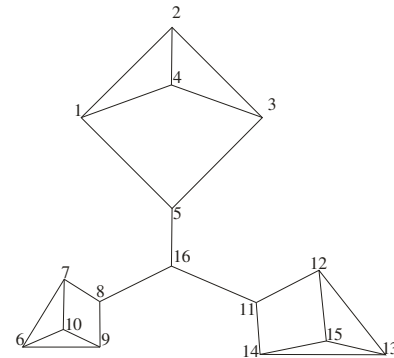
b)  $m = \frac{1}{35}(4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2) \approx 6,6$  ..... 2p

$\sigma^2 \approx \frac{1}{35}(4 \cdot 2,7^2 + 6 \cdot 1,7^2 + 7 \cdot 0,7^2 + 8 \cdot 0,3^2 + 5 \cdot 1,3^2 + 3 \cdot 2,3^2 + 2 \cdot 3,3^2) = \frac{1}{35} \cdot 96,74 = 2,764$  ..... 2p

Calcul mediană ..... 1p

3. Se consideră graful din figura alăturată :

- Arătați că graful este regulat.
- Dați un exemplu de ciclu elementar cu 3, 4, 5 muchii.
- Să se afle numărul de cicluri elementare (două cicluri sunt diferite dacă diferă măcar printr-o muchie).



**Soluție:**

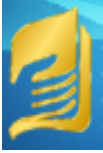
- Calculează  $d_G(v) = 3, \forall v \Rightarrow$  graf regulat ..... 2p
- (1241), (12351), (124351) sau orice alt exemplu corect ..... (3 × 1) 3p
- Orice ciclu elementar nu conține vârful 16 și avem:  
 (1241), (2342) cu 3 muchii  
 (12351), (12341), (14351) cu 4 muchii  
 (124351), (142351) cu 5 muchii. Deci, în total,  $7 \times 3 = 21$  cicluri. .... 2p

4. Dintr-o urnă cu 15 bile numerotate de la 1 la 15 se extrage la întâmplare o bilă. Se cere probabilitatea ca numărul înscris pe bila extrasă să fie:

- un număr par;
- un număr prim;
- un număr divizibil cu 3.

**Soluție:**

- Numărul cazurilor posibile pentru fiecare caz este același, și anume 15 ..... 1p
- Număr cazuri favorabile 7 (numerele: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14),  $P_1 = \frac{7}{15} = 0,4(6)$  ..... 2p
  - Număr cazuri favorabile 6 (numerele: 2, 3, 5, 7, 11, 13),  $P_2 = \frac{6}{15} = 0,4$  ..... 2p
  - Număr cazuri favorabile 5 (numerele: 3, 6, 9, 12, 15),  $P_3 = \frac{5}{15} = 0,3(3)$  ..... 2p



# CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR  
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ**  
**9 martie 2013**

FACULTATEA  
CONSTRUCȚII DE MAȘINI  
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

**Filiera teoretică, profil umanist**

## BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. Se consideră matricele:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Demonstrați că  $A^4 = B^3$ .
- b) Calculați  $AB - BA + C$ .
- c) Determinați matricea  $X$  astfel încât  $AX + XB = I_2$ .

**Soluție:**

a)  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = I_2$  ..... 1p

$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = I_2$  ..... 1p

b)  $AB - BA + C = I_2$  ..... 2p

c)  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  ..... 1p

$$AX + XB = \begin{pmatrix} c-b & a-b+d \\ -a-d & -b+c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obține  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ..... 1p

2. Avem o foaie de hârtie pe care în prima etapă o împărțim în 5 bucăți. În a doua etapă, una dintre aceste bucăți este din nou împărțită în alte 5 bucăți. Apoi, în a treia etapă, una din bucățile obținute în etapa a doua, este împărțită în 5 bucăți. Acest procedeu se repetă de mai multe ori după aceeași regulă.

- a) Câte bucăți de hârtie se obțin: în a doua etapă, a treia etapă, a patra etapă?
- b) După repetarea acestui procedeu de mai multe ori, Claudiu și Cristina au numărat pe rând bucățile obținute. Claudiu a spus că sunt 2012 bucăți, iar Cristina a spus că sunt 2013 bucăți. Cine a numărat corect?

**Soluție:**

În a doua etapă se obțin  $4 + 5 = 9$  bucăți ..... 1p

În a treia etapă se obțin  $8 + 5 = 13$  bucăți ..... 1p

În a patra etapă se obțin  $12 + 5 = 17$  bucăți ..... 1p

În fiecare etapă numărul de bucăți de hârtie crește cu 4 ..... 1p

Cum inițial am avut o foaie de hârtie, după  $n$  etape se vor obține  $(1 + 4n)$  bucăți ..... 2p

Cum  $2012 = 4 \cdot 503$  și  $2013 = 1 + 4 \cdot 503 \Rightarrow$  Cristina a numărat corect ..... 1p

3. Într-un reper cartezian ortogonal (XOY) se consideră punctele A(2,3), B(2m+1,2) și C(3,2m+2), m fiind un număr real.

a) Demonstrați că aria triunghiului ABC este  $S_{ABC} = \frac{1}{2}[(2m-1)^2 + 1]$ .

b) Determinați m pentru care aria triunghiului ABC este minimă.

**Soluție:**

a)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$ ;  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2m+1 & 2 & 1 \\ 3 & 2m+2 & 1 \end{vmatrix}$  ..... 2p

$\Delta = 4m^2 - 4m + 2$  ..... 2p

$S_{ABC} = \frac{1}{2}[(2m-1)^2 + 1]$  ..... 1p

b)  $S_{min} = \frac{1}{2}$  pentru  $m = \frac{1}{2}$  ..... 2p

4. Fie a, b, c, x, y cinci numere întregi și matricea  $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & x \\ y & 0 & c \end{pmatrix}$ .

Doi elevi, Teodor și Octavian, joacă următorul joc:

Teodor dă o valoare lui a, apoi Octavian dă o valoare lui x.

După aceea, Teodor dă o valoare lui b și apoi Octavian dă o valoare lui y.

În final, Teodor dă o valoare lui c.

Câștigă Teodor numai dacă  $|\det M| = 1$ .

Precizați tripletele (a, b, c) care asigură victoria lui Teodor, oricare ar fi alegerile făcute de Octavian.

**Soluție:**

$\det M = bc + axy$  ..... 2p

Teodor câștigă dacă și numai dacă  $|bc + axy| = 1$  ..... 1p

Pentru ca Teodor să câștige pentru orice x și y, rezultă  $a = 0$  ..... 2p

Deci  $|bc| = 1$  de unde:

$(a, b, c) \in \{(0, -1, -1); (0, -1, 1); (0, 1, -1); (0, 1, 1)\}$  ..... 2p