1. $ab+bc+ca=a^2b^2c^2$ deci $a^2b^2=\frac{ab+bc+ca}{c^2}$ și $1+a^2b^2=\frac{ab+bc+ca+c^2}{c^2}=\frac{(a+c)(b+c)}{c^2}$
   Analog
   $1+b^2c^2==\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}$, $1+c^2a^2==\frac{(a+b)(b+c)}{b^2}$ ……………………………………..3 p
   Deci numărul se va scrie $\sqrt{\frac{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2c^2}}=\left|\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}\right|\in\mathbb{Q}$……………4 p

2. Întrucât $1952=4\cdot 488$, folosind primele două relații ale sistemului, obținem:

$25x^2+20y^2+13z^2\le 4\cdot(3xy+6yz+4zx)\Leftrightarrow 25x^2+20y^2+13z^2-12xy-24yz-16zx\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(9x^2-12xy+4y^2)+(16y^2-24yz+9z^2)+(4z^2-16zx+16x^2)\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(3x-2y)^2+(4y-3z)^2+(2z-4x)^2\le 0$. ……………………………………………………3 p

Întrucât $(3x-2y)^2\ge 0,(4y-3z)^2\ge 0,(2z-4x)^2\ge 0$,

deducem că $3x-2y=4y-3z=2z-4x=0$.

De aici rezultă că $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k\Rightarrow x=2k, y=3k, z=4k$. A treia relație a sistemului devine:

$2k+3k+4k=18$, deci $k=\frac{18}{2}=9$ și $x=2\cdot 9=18, y=3\cdot 9=27, z=4\cdot 9=36$. ……4 p

3. Notăm $SA=a, SB=b, SC=c, SD=d$, deci a, b, c, d naturale nenule

a)

Avem urmatoarele inegalități:

- in$\triangle SAB: |a-b| < 1$ si, Cum a, b naturale nenule, rezulta ca $a-b=0$, deci $a=b$;
- in $\triangle SBC: |b-c| < 1$ si, cum b, c naturale nenule rezultă $b = c$
- in $\triangle SCD: |c-d| < 1$ si, cum c, d naturale nenule rezultă $c = d$

in $\triangle SDA: |d-a| < 1$ deci $a = d$ I

Rezultă $a=b=c=d$, deci triunghiurile SAB, SBC, SCD, SDA sunt isoscele congruente, cu bazele de lungime 1……3p

b) Fie $SO \perp (ABC), O \in (ABC)$. Întrucât $SA=SB=SC=SD$, rezultă congruența triunghiurilor SOA, SOB, SOC, SOD (sunt dreptunghice si au cateta $[SO]$ comună), deci $OA=OB=OC=OD$. Rezultă că rombul $ABCD$ este inscriptibil, deci este pătrat……………………………………………………………..2p

c)Avem $SA=SB=SC=SD=a$ si, cum $SC \perp SA$, conform teoremei lui Pitagora, avem $SA^2+SC^2=AC^2=AB^2+BC^2$, deci $2a^2=2$,adică $a=1$. Așadar fețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri echilaterale de latură 1…………………………………………………………………………………………………..1p

Considerând M mijlocul lui [BC] va rezulta sin $\widehat{OMS} = \frac{SO}{SM}$, unde SO = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ din triunghiul SOB și SM = $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rezultă sin $\widehat{OMS} = \sqrt{\frac{2}{3}}$………………………………………………………………………………………………………1p

4. Dacă Q este piciorul înălțimii din C , din teorema celor trei perpendiculare va rezulta $MQ \perp AB$ ………………………………………………………………….2 p
   Deci $MA^2 - MB^2 = MQ^2 + AQ^2 - MQ^2 - BQ^2 = AQ^2 - BQ^2 = (AC^2 - CQ^2) - (BC^2 - CQ^2) = AC^2 - BC^2, deci\ MA^2 - MB^2 = AC^2 - BC^2$ de unde rezultă relația din enunț.. ……………………………………………………………………….5 p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VIII-a

Subiecte:

1. Fie a, b, c numere raționale nenule astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = abc$. Să se arate că numărul $\sqrt{(1 + a^2b^2)(1 + b^2c^2)(1 + c^2a^2)}$ este rațional.

2. Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ care verifică relațiile: $\begin{cases} 25x^2 + 20y^2 + 13z^2 \leq 1952 \\ 3xy + 6yz + 4zx = 488 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$

   Mihai Bodan, Cosmeşti, Teleorman

3. Fie piramida $SABCD$, a carei bază $ABCD$ este un romb cu latura de lungime 1, iar muchiile laterale ale piramidei au lungimile exprimate prin numere naturale nenule.
   a) Arătați că triunghiurile SAB, SBC, SCD, SDA sunt congruente
   b) Arătați că $ABCD$ este pătrat;
   c) Dacă $SC \perp SA$, atunci determinați sinusul unghiului plan al unghiului diedru determinat de planele (SBC) și (ABC).

   Mihai Bodan, Cosmeşti, Teleorman

4. Pe înălțimea din C a triunghiului ABC se consideră un punct D. Dacă M este un punct în spațiu astfel încât $MD \perp (ABC)$, să se arate că $MA^2 + BC^2 = MB^2 + AC^2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.