Olimpiada de matematică – clasa a XI-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SUBIECTE

1. Calculaţi limita $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[n^2\sqrt{2}+n\sqrt{3}\right]}{\left[n^2\sqrt{3}+n\sqrt{2}\right]}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

2. Fie $z,\ v\in\mathbb{C},\ z\neq 0$ două numere complexe, şi matricea $X=\begin{pmatrix} z & v \\ 0 & z\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$.

a) Determinaţi X^n pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Determinaţi $z,\ v\in\mathbb{C}$ pentru care $X^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

3. Fie irul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\begin{vmatrix} a+x & a & \cdots & a \\ a & a+x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x\end{vmatrix}$. Calculaţi limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_{n+1}}{x\cdot a_n}\right)^n$.

4. Fie irul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit de relaţia $2a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_n}{n}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ i

$a_1=\dfrac{1}{2}$.

a) Determinaţi termenul general al irului $(a_n)_{n\geq 1}$

b) Calculaţi limita $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{2^{\frac{n+1}{2}}\cdot a_{n+1}}$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 10 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.