S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VIII-a

Subiectul I

Dacă pentru numerele reale a și b are loc relația $a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}+5=0$, să se demonstreze că $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot(b-a)=1$

SUBIECTUL II

Aflați dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, știind că lungimile diagonalelor fețelor lui sunt invers proporționale cu $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\frac{\sqrt{11}}{11}$ și $\frac{\sqrt{6}}{6}$, iar lungimea diagonalei lui este egală cu $\sqrt{12}$ cm.

Supliment GM nr.10/2013

SUBIECTUL III

a) Arătați că oricare ar fi *x, y* numerele reale pozitive, are loc inegalitatea $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

b) Arătați că oricare ar fi numerele reale pozitive *x, y, z,* are loc inegalitatea: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$.

***

SUBIECTUL IV

Fie triunghiul *ABC* dreptunghic în *A* iar punctul *M* exterior planului *ABC* astfel încât $MB\perp AB$ şi $MC\perp AC$. Fie *N, P* şi *E* mijloacele segmentelor *AM*,*BC* respectiv *AC*. Stabiliţi dacă :

a) $PN\perp(ABC)$;

b) $4PN^2=BM^2-AC^2$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.
Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Subiecte selectate şi propuse de: prof. Botez Radu, prof. Bonta Patricia, prof. Danciu Alin și prof. Cojocnean Mihaela

S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a VIII-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I . Dacă numerele reale $a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}+5=0$, să se demonstreze că $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot(b-a)=1$.

***

Rezolvare:

$a^2+b^2-2a\sqrt{2}-2b\sqrt{3}+5=0 \Leftrightarrow \left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=0 \Rightarrow a=\sqrt{2},\ b=\sqrt{3}$ 4p

$\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)(b-a)=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=3-2=1$..3p

SUBIECTUL II

Aflați dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic, știind că lungimile diagonalelor fețelor lui sunt invers proporționale cu $\frac{\sqrt{7}}{7}$, $\frac{\sqrt{11}}{11}$ și $\frac{\sqrt{6}}{6}$, iar lungimea diagonalei lui este egală cu $\sqrt{12}$ cm.

Supliment GM nr.10/2013

Rezolvare:

$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{12} \Rightarrow d^2=a^2+b^2+c^2=12$ (1)..1p

Diagonalele fețelor au lungimile: $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, respectiv $\sqrt{b^2+c^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}=\sqrt{a^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{11}}{11}=\sqrt{b^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}=k$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}k$, $\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{11}k$, $\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{6}k$ 2p

$\Rightarrow a^2+b^2=7k^2,\ \ a^2+c^2=11k^2,\ \ \ b^2+c^2=6k^2 \Rightarrow$ adunând cele trei relații:

$2(a^2+b^2+c^2)=24k^2 \Rightarrow \quad a^2+b^2+c^2=12k^2 \Rightarrow$ înlocuind în (1)

$\Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=1$ 2p

$\Rightarrow a^2+b^2=7 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$ cm

$a^2+c^2=11 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=1$ cm

$b^2+c^2=6 \Rightarrow a^2=6 \Rightarrow a=\sqrt{6}$ cm..2p

SUBIECTUL III

a) Arătați că oricare ar fi *x, y* numerele reale pozitive are loc inegalitatea $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

b) Arătați că oricare ar fi numerele reale pozitive *x, y, z* are loc inegalitatea:
$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$.

***

Rezolvare:

a) $x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ 2p

b)Notăm $a=\frac{x^2}{y^2}$, $b=\frac{y^2}{z^2}$ şi $c=\frac{z^2}{x^2}$

Din inegalitatea mediilor avem: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$; $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, respectiv $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ ...2p

Însumând relațiile de mai sus obținem $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$ 2p

Înlocuim în această inegalitate substituțiile inițiale obținem:

$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}+\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$ 1p

SUBIECTUL IV

Fie triunghiul ABC dreptunghic în *A* iar punctul *M* exterior planului ABC astfel încât $MB \perp AB$ şi $MC \perp AC$. Fie *N*, *P* şi *E* mijloacele segmentelor *AM*, *BC* respectiv *AC*. Stabiliţi dacă :

a) $PN \perp (ABC)$;

b) $4PN^2=BM^2-AC^2$.

Rezolvare:

a) Segmentele BN şi CN sunt mediane relative ipotenuzei$\Rightarrow$ BN=$\dfrac{AM}{2}$=CN

$\Rightarrow \Delta NBC$ isoscel de vârf N şi cum $[NP]$ mediană$\Rightarrow$NP$\perp$BC(1) 1p

ΔMCA: $[NE]$ linie mijlocie$\Rightarrow$NE$\|$MC şi cum MC$\perp$AC obţinem NE$\perp$AC(2).................1p

ΔABC: $[PE]$ linie mijlocie$\Rightarrow$PE$\|$AB şi cum AB$\perp$AC obţinem PE$\perp$AC(3) 1p

Din (2) şi (3) obţinem AC$\perp(NEP)\Rightarrow$AC$\perp$NP(4) 1p

Din (1) şi (4) rezultă NP$\perp(ABC)$ 1p

b) ΔNPB $\Rightarrow$ conform T.P

$NP^2 = BN^2 - PB^2 = \dfrac{AM^2}{4} - \dfrac{BC^2}{4}$ 1p

$\Rightarrow 4NP^2 = AM^2 - \left(AC^2 + AB^2\right) \Rightarrow 4NP^2 = AM^2 - AB^2 - AC^2 \Rightarrow 4NP^2 = BM^2 - AC^2$ 1p

Se punctează orice rezolvare corectă diferită de cea din barem