**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa locală**

**Județul Alba, 13 februarie 2015**

**Clasa a VI-a**

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:
	* + - 1. $\frac{x+3^{2}-2}{3}+\frac{x+5^{2}-2}{5}=8$.
				2. $\frac{x-2+3^{2}}{3}+\frac{x-2+5^{2}}{5}+\frac{x-2+7^{2}}{7}+\cdots +\frac{x-2+197^{2}}{197}+\frac{x-2+199^{2}}{199}=9999$.
2. Se consideră numerele naturale $a=n∙\left(n+1\right)∙\left(n+2\right)+8$ și $b=6^{a}$, unde $n$ este un număr natural oarecare.
	* + - 1. Arătați că numărul $36$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
				2. Determinați restul împărțirii lui $a$ la $3$.
				3. Arătați că numărul $b$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
3. Se consideră unghiurile adiacente $∢AOB, ∢BOC, ∢COD$ și $∢DOE$ astfel încât punctele $E, O$ și $A$ să fie coliniare. Știind că: $4∙m\left(∢AOB\right)=m\left(∢BOC\right), m\left(∢BOC\right)=\frac{4}{5}∙m\left(∢COD\right)$ și $\frac{m\left(∢DOE\right)}{8}=\frac{m\left(∢COD\right)}{5}$. Determinați măsurile unghiurilor $∢AOB, ∢BOC, ∢COD$ și $∢DOE$.
4. Două unghiuri complementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de $25^{°}$. Se acceptă că una din laturile celor două unghiuri aparține interiorului unghiului format de cele două bisectoare.
	* + - 1. Demonstrați că cele două unghiuri nu pot fi adiacente.
				2. Determinați măsurile celor două unghiuri.

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VI-a**

 **Problema 1.** Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

* + - * 1. $\frac{x+3^{2}-2}{3}+\frac{x+5^{2}-2}{5}=8$.
				2. $\frac{x-2+3^{2}}{3}+\frac{x-2+5^{2}}{5}+\frac{x-2+7^{2}}{7}+\cdots +\frac{x-2+197^{2}}{197}+\frac{x-2+199^{2}}{199}=9999$.

**Soluție.** a) $x=2$ ………..……….………………….…………….………………………… 2 puncte

 b) $\frac{x-2}{3}+3+\frac{x-2}{5}+5+\frac{x-2}{7}+7+\cdots +\frac{x-2}{199}+199=9999$……………………..… 2 puncte

 $\left(x-2\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots +\frac{1}{199}\right)+9999=9999$ …………………..…………....… 2 puncte

 $x=2$ .…………….…………………………………………………………...….… 1 punct

 **Problema 2.** Se consideră numerele naturale $a=n∙\left(n+1\right)∙\left(n+2\right)+8$ și $b=6^{a}$, unde $n$

 este un număr natural oarecare.

* + - * 1. Arătați că numărul $36$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.
				2. Determinați restul împărțirii lui $a$ la $3$.
				3. Arătați că numărul $b$ se poate scrie ca sumă de trei cuburi perfecte.

**Soluție.** a) $36=1^{3}+2^{3}+3^{3}$………………………………………………..……….……….2 puncte

b) $n∙\left(n+1\right)∙\left(n+2\right)\vdots 3$ …………………………………………..…………. ….2 puncte

$r=2$ ………………………………………………………………………..……. 1 punct

c) $a=3k+2, k\in N$ …………………………………………..……………..….…. 1 punct

$b=6^{3k+2}=6^{3k}\left(1^{3}+2^{3}+3^{3}\right)=\left(6^{k}\right)^{3}+\left(2∙6^{k}\right)^{3}+\left(3∙6^{k}\right)^{3}$ ……….……. 1 punct

**Problema 3.** Determinaţi consideră unghiurile adiacente $∢AOB, ∢BOC, ∢COD$ și $∢DOE$ astfel încât punctele $E, O$ și $A$ să fie coliniare. Știind că: $4∙m\left(∢AOB\right)=m\left(∢BOC\right), m\left(∢BOC\right)=\frac{4}{5}∙m\left(∢COD\right)$ și $\frac{m\left(∢DOE\right)}{8}=\frac{m\left(∢COD\right)}{5}$. Determinați măsurile unghiurilor $∢AOB, ∢BOC, ∢COD$ și $∢DOE$.

**Soluție.** Cazul 1. $O\in \left(AE\right)$

****$\left.\begin{matrix}\begin{matrix}\begin{matrix}m\left(∢AOB\right)=x\\m\left(∢BOC\right)=4x\end{matrix}\\m\left(∢COD\right)=5x\end{matrix}\\m\left(∢DOE\right)=8x\end{matrix}\right\}$………………………… 2 puncte

$x+4x+5x+8x=180^{°}$ ……..………..… 1 punct

$x=10^{°}$ ……..………………………..…..… 1 punct

$$m\left(∢AOB\right)=10^{°}, m\left(∢BOC\right)=40^{°} $$

$m\left(∢COD\right)=50^{°}, m\left(∢DOE\right)=80^{°}$ ………. 1 punct

Cazul 2. $A\in \left(OE\right)$ sau $E\in \left(OA\right)$ se acordă 2 puncte. În cazul în care un elev rezolvă doar cazul 2 se acordă 5 puncte pentru acest caz.

**Problema 4.** Două unghiuri complementare au o latură comună și bisectoarele lor determină un unghi de $25^{°}$. Se acceptă că una din laturile celor două unghiuri aparține interiorului unghiului format de cele două bisectoare.

* + - * 1. Demonstrați că cele două unghiuri nu pot fi adiacente.
				2. Determinați măsurile celor două unghiuri.

**Soluție.**

a) Dacă sunt adiacente, atunci $m\left(∢EOF\right)=45^{°}$. Contradicție

 cu ipoteza. …………………………………….. 3 puncte

b) Folosind notațiile de pe figură și ipoteza avem:

 $x-y=25^{°};2x+2y=90^{°}$ ………………… 2 puncte

 Finalizare $m\left(∢AOB\right)=70^{°}$ și $m\left(∢BOC\right)=20^{°}$

……………………………………………….. 2 puncte