Inspectoratul Şcolar al Judeţului Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016

Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(AA^t) = 0$.
   b) Fie $B \in M_{3,2}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(BB^t) = 0$.
   c) Fie $C \in M_{3,3}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(C - C^t) = 0$.

2. Se consideră şirul definit astfel: $x_1 = 1$,
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n},$$
pentru orice n.
a) Aflaţi limita şirului.
b) Calculaţi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $2A+3B = 6AB$. Arătaţi că $AB = BA$.

4. Arătaţi că
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada de matematică
faza locală
21 februarie 2016
Soluţii şi bareme
Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(AA^t) = 0$.
b) Fie $B \in M_{3,2}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(BB^t) = 0$.
c) Fie $C \in M_{3,3}(\mathbb{C})$. Arătaţi că $\det(C - C^t) = 0$.
Soluţie. a) În matricea AA^t, oricare 2 linii sunt proporţionale 2p
b) Dacă
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$
atunci $B \cdot B^t = \overline{B} \cdot \overline{B}^t$, unde
$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$
Atunci $\det(BB^t) = \det\left(\overline{B}\right)\det\left(\overline{B}^t\right) = 0$ 2p
c) Determinantul oricărei matrice este egal cu determinantul transpusei, deci
$$\det\left(C - C^t\right) = \det\left(\left(C - C^t\right)^t\right) = \det\left(C^t - C\right) = \det\left(-\left(C - C^t\right)\right) = -\det\left(C - C^t\right),$$
de unde concluzia 3p

2. Se consideră şirul definit astfel: $x_1 = 1$,
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2x_n},$$
pentru orice n.
a) Aflaţi limita şirului.
b) Calculaţi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$
Soluţie. a) Şirul este strict crescător 1p
Dacă ar fi mărginit, ar converge către un număr real L, şi am obţine prin trecere la limită $L = L + \frac{1}{2L}$, absurd, deci limita este ∞ 3p
b) Calculăm, cu Stolz Cesaro,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(x_n + \frac{1}{2x_n}\right)^2 - x_n^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{4x_n^2}\right) = 1,$$
deci limita cerută este 1 .... 3p

3. Fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, astfel încât $2A + 3B = 6AB$. Arătaţi că $AB = BA$.
Soluţie. Egalitatea dată este echivalentă cu
$$I_n - 2A - 3B + 6AB = I_n$$
sau
$$(I_n - 2A)(I_n - 3B) = I_n$$
.... 3p
Deducem că matricele $I_n - 2A$ şi $I_n - 3B$ sunt inverse una celeilalte, deci avem şi
$$(I_n - 3B)(I_n - 2A) = I_n,$$
.... 3p
de unde obţinem $2A + 3B = 6BA$, deci şi concluzia 1p

4. Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty.$$

Soluţie. Fie

$$h_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Şirul este strict crescător. Dacă nu ar avea limita ∞, ar fi convergent. Fie în acest caz H limita sa 2p
Atunci

$$\lim_{n\to\infty}(h_{2n}-h_n)=H-H=0.$$

.... 2p
dar

$$h_{2n}-h_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

contradicţie..3p