Olimpiada de matematică
Etapa locală, 28.02.2015
Clasa aV-a

Subiecte:

1. Fie numărul $A = 2^{2020} \cdot 5^{2015} + 2^{2017} \cdot 5^{2016} - 2^{2016} \cdot 5^{2017}$.
   a) Arătați că numărul A nu este pătrat perfect.
   b) Determinați numărul cifrelor lui A, scris în baza zece.

2. Fie A o mulțime formată din 10 numere naturale. Adunând resturile împărțirii tuturor numerelor din mulțimea A la 4 se obține 29.
   a) Câte numere pare și câte numere impare conține mulțimea A ?
   b) Dacă suma numerelor impare din A se împarte la 4, determinați restul împărțirii.

3. a) Arătați că $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023$.
   b) Demonstrați că numărul 2015 nu poate fi scris sub forma $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$, unde n este un număr natural.
   c) Fie $a = (2^0 + 2^1) + (2^0 + 2^1 + 2^2) + \ldots + (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2015})$.
   Arătați că numărul $b = a + 2015$ este divizibil cu 4.

4. Să se arate că numărul $n = 11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + \underbrace{100\ldots01}_{101\ cifre}$ este divizibil cu 10, dar nu este divizibil cu 100.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 2 ore.
La fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.

Barem clasa a V-a

1. a) $A = 2^{2016} \cdot 5^{2015}(2^4 + 2 \cdot 5 - 5^2) = 2^{2016} \cdot 5^{2015} = (2^{1008})^2 \cdot (5^{1007})^2 \cdot 5$, care nu este pătrat perfect……………………………………………………………………………… $4p$

b) $A = 2^{2016} \cdot 5^{2015} = 2 \cdot 10^{2015} = 2\underbrace{00\ldots0}_{2015}$, deci A are 2016 cifre……………………… $3p$

2 a) Deoarece cele 10 resturi sunt mai mici sau egale cu 3 și suma lor este $29 = 3 \cdot 10 - 1$, va rezulta că nouă dintre resturi sunt 3, iar unul este 2 (dacă ar exista cel mult opt resturi egale cu 3, suma lor ar fi mai mică sau egală cu 24, deci ar rămâne două resturi mai mici sau egale cu 2 care au suma mai mare sau egală cu 5,ceea ce nu este posibil). Deci nouă numere sunt impare (de forma $4k + 3, k \in \mathbb{N}$), iar unul par, de forma $4n + 2, n \in \mathbb{N}$……………………………………4p

b) Suma numerelor impare din A este de forma $4p + 27 = 4(p + 6) + 3, p \in \mathbb{N}$, deci restul împărțirii la 4 este 3……………………………………………………………………………… $3p$

3. a) Dacă $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9$,va rezulta $2S - S = 2^{10} - 1$ și $S = 1023$……………$2p$

b) Cerința rezultă din inegalitățile
$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023 < 2015 < 2047 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^9 + 2^{10}$……….. $2p$

c) Va rezulta $a = (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \ldots + (2^{2016} - 1) = 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016} - 2015$ deci $b = a + 2015 = 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2016} = 2^2(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2014})$, care este divizibil cu 4……..$3p$

4. n se scrie $(10 + 1) + (10^2 + 1) + (10^3 + 1) + \cdots + (10^{100} + 1) = (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{100}) + 100$……………………………………………………………………………… $3p$

$n = 10 + (10^2 + 10^3 + \cdots + 10^{100}) + 100$……………………………………………………..$3p$

Finalizare……………………………………………………………………………………… $1p$

Observație.Orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se punctează cu punctajul maxim acordat.