Universitatea Valahia din Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dâmboviţa
SSMR Filiala Dâmboviţa

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală Dâmboviţa - 21 Februarie 2016

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Demonstraţi că mulţimea

$$G = \left\{ A_x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A_x = \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^* \right\},$$

înzestrată cu operaţia de înmulţire a matricelor, este grup. Este izomorf cu $(\mathbb{R}^*,\cdot)$?

Subiectul 2. Demonstraţi că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită pentru orice număr real x prin formula $f(x) = x^5 + x$, este bijectivă, apoi calculaţi:

$$\int_0^2 f^{-1}(x)\, dx.$$

Subiectul 3. Calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{n^2}{k^2}\right)}.$$

GM

Subiectul 4. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall\, y \in G\}$. Arătaţi că, dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.

GM

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se evaluează de la 0 la 7.

CLASA A XII-A – BAREM

SUBIECTUL 1

$A_x \cdot A_y = A_{xy}$, cu $xy \neq 0$, deci G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ (2 puncte)

A_1 elem. neutru (1 punct), $A_{1/x}$ simetricul lui A_x (1 punct)

$f: \mathbb{R}^* \to G$, $f(x) = A_x$ este bijectivă (2 puncte), $f(xy) = f(x)f(y)$ (1 punct)

SUBIECTUL 2

f injectivă (2 puncte), surjectivă (2 puncte)

~~f(t)~~ $[0,1] \xrightarrow{f} [0,2]$ bijecție (1 punct),

$x = f(t)$, $t \in [0,1]$ schimbare de variabilă (1 punct), deci $I = 4/3$ (1 punct)

SUBIECTUL 3

Soluţie. Avem 2 puncte

$$a_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{n^2}{k^2}\right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k^2}} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^2 \cdot b_n,$$

unde $b_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$

2 puncte

Din criteriul radicalului obţinem $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Pe de altă parte, cum $\ln b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$, rezultă că

2 puncte

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx = x\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \ln 2 - 2\left(x - \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2.$$

În consecinţă $\lim_{n\to\infty} a_n = e^2 \cdot e^{\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2} = 2e^{\frac{\pi}{2}}$. 1 punct

SUBIECTUL 4

4 puncte **Soluţie.** Fie $a \in Z(G)$ şi $b \in G \setminus Z(G)$. Atunci $ab \in G \setminus Z(G)$, deci $(ab)^2 = e$, de unde $abab = e$, adică $aabb = e$. Cum $b^2 = e$, obţinem $a^2 = e$, adică $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$, deci grupul este comutativ.

3 puncte