Inspectoratul Şcolar Judeţean Mehedinţi

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ-16 FEBRUARIE 2013
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

1) Se dau permutările $\sigma, \tau \in S_4$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ şi $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Să se arate că ecuaţia $x^2 \cdot \sigma^{2013} = \tau$ nu are soluţii în S_4.

2) Să se determine $X \in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $X^{2013} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL II

Fie $A, B \in M_n(IR), n \in IN^*$. Să se arate că este adevărată relaţia: $Tr[A^n(AB - BA)] = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $Tr(X)$ este urma matricii X.

SUBIECTUL III

1) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$.

2) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \ln(n^2 + 1)$.

SUBIECTUL IV

Se consideră şirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n\geq 0}$ având proprietatea că $x_{n+1}^2 \leq 2013(2x_n - 2013)$, $\forall n \in IN^*$. Să se arate că şirul este convergent şi să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALA
BAREM DE EVALUARE ŞI NOTARE
CLASA a XI-a

Subiectul I

1) $\sigma^3 = e \Rightarrow \sigma^{2013} = e$ (1p)

Ecuaţia devine $x^2 = \tau$ (1p)

$\varepsilon(\tau) = -1 < 0 \Rightarrow$ ecuaţia nu are soluţii (1p)

2) $\det(X^{2013}) = \det^{2013}(X) = 0 \Rightarrow \det(X) = 0$ (1p)

Din ecuaţia (relaţia) Cayley-Hamilton $\Rightarrow$

$\Rightarrow X^2 = tX,\ t = tr(X) \Rightarrow$ inductiv, $X^n = t^{n-1}X,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1p)

$X^{2013} = t^{2012}X \Rightarrow t^{2012}X = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow tr(t^{2012}X) = 1 \Rightarrow t^{2013} = 1 \Rightarrow t = 1$ (1p)

$X^{2013} = X = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 21 & 7 \end{pmatrix}$ (1p)

Subiectul II

$A^n(AB - BA) = A^nAB - A^nBA$ (1p)

$= A(A^nB) - (A^nB)A$ (2p)

$tr(XY - YX) = 0,\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (3p)

$tr[A^n(AB - BA)] = tr[A(A^nB) - (A^nB)A] = 0$ (1p)

Subiectul III

1) Şirul $y_n = \ln n,\ n \geq 2$ este strict crescator şi nemărginit (1p)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln\frac{n+1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\ln e} = 1 \qquad (2p)$$

În baza criteriului Cesàro-Stolz $\Rightarrow$ limita ~~ste~~ 1 (1p)

2) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}[\ln(k+2)-\ln k] - \ln(n^2+1) \qquad (1p)$

$$a_n = \ln\frac{n^2+3n+2}{2n^2+2} \qquad (1p)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \qquad (1p)$$

<u>Subiectul IV</u>

$x_{n+1}^2 - x_n^2 \le 2013(2x_n - 2013) - x_n^2 \qquad (1p)$

$(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n) \le -(x_n-2013)^2 \qquad (1p)$

$(x_{n+1}-x_n)\underbrace{(x_{n+1}+x_n)}_{>0} \le 0 \Rightarrow x_{n+1} \le x_n,\ \forall n \ge 0 \ (1p)$

$2013(2x_n - 2013) \ge x_{n+1}^2 \ge 0 \Rightarrow x_n \ge \frac{2013}{2},\ \forall n \ge 0 \ (1p)$

$\frac{2013}{2} \le x_n \le x_{n-1} \le \dots \le x_0,\ \forall n \ge 0 \ (1p)$

Șirul ~~ste~~ monoton și mărginit, deci convergent

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in (0,\infty). \quad (1p)$

$l^2 \le 2013(2l - 2013) \Rightarrow (l-2013)^2 \le 0 \Rightarrow l = 2013 \ (1p)$