Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a XI-a

Problema 1.

Să se demonstreze că :

a). $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}}=\frac{1}{4}$

b). $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

Problema 2.

Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţia: $\det\left(A^2+A+I_2\right)=0.$

Să se demonstreze că $\det\left(A^2+x\cdot A+I_2\right)=(x-1)^2,(\forall)x\in\mathbb{R}.$

Problema 3.

Fie $q\in\mathbb{N},\ q\ge 3$ şi $A\in M_2(\mathbb{R}),\ A=\begin{pmatrix} ctg\frac{\pi}{q} & 1 \\ -1 & ctg\frac{\pi}{q}\end{pmatrix}.$

a). Să se determine şirurile $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$ de numere reale, astfel încât

$A^n=\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n\end{pmatrix}.$

b). Să se demonstreze că şirurile $(x_n)_{n\ge1}$ şi $(y_n)_{n\ge1}$ sunt divergente.

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ o funcţie crescătoare şi surjectivă, iar $(x_n)_{n\ge0}$ un şir de numere reale descrescător nemărginit.

a). Să se arate că şirul $\left(f(x_n)\right)_{n\ge0}$ este convergent.

b). Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- ♦ **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- ♦ **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a). Utilizăm criteriul cleştelui: $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+n}} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}} < \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8}}, \forall k=\overline{1,n};$ $a_n \le x_n < b_n$	**1p**
	$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^8+n}}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{\sqrt{n^8+n}}\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} \to \frac{1}{4};$	**1p**
	$b_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8}} = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{n^4\cdot 4} \to \frac{1}{4};$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l} a_n \to \frac{1}{4} \\ b_n \to \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \to \frac{1}{4}.$	

b). $y_n = n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\right) + n\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^3}{n^4} - \frac{1}{4\cdot n}\right) = u_n + v_n$;

$$u_n = n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{\sqrt{n^8+k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}\right) = n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3\left(n^4-\sqrt{n^8+k}\right)}{n^4\cdot\sqrt{n^8+k}} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^3\cdot\sqrt{n^8+k}\cdot\left(n^4+\sqrt{n^8+k}\right)};$$

$$|u_n| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{n^4}{n^3\cdot n^8\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{n^6\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^8}}\right)} \to 0$$

$$v_n = n\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{n^4\cdot 4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2n^3+n^2}{4\cdot n^3} \to \frac{1}{2}$$

Rezultă că $y_n \to \frac{1}{2}$.

Metoda 2. Se încadrează şirul $(y_n)_{n\ge1}$ între şirurile **:**

$$n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4+1} - \frac{1}{4}\right) \le y_n \le n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4} - \frac{1}{4}\right);$$ **2p**

Dar $n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4+1} - \frac{1}{4}\right) = n\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4\cdot(n^4+1)} - \frac{1}{4}\right) = n\cdot\frac{2n^3+n^2-4}{4\cdot\left(n^4+1\right)} \to \frac{1}{2}$; **1p**

La fel $n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4} - \frac{1}{4}\right) = n\cdot\left(\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4\cdot n^4} - \frac{1}{4}\right) = n\cdot\frac{2n^3+n^2}{4\cdot\left(n^4+1\right)} \to \frac{1}{2}$.

Rezultă că $y_n \to \frac{1}{2}$. **1p**

2.	$A^2+A+I_2=\left(A+\frac{1}{2}\cdot I_2\right)^2-\left(\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot I_2\right)^2=\left(A+\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot I_2\right)\left(A+\frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot I_2\right).$ Din $\det\left(A^2+A+I_2\right)=0\Rightarrow\det\left(A+\varepsilon\cdot I_2\right)\cdot\det\left(A+\bar{\varepsilon}\cdot I_2\right)=0,\ \varepsilon=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}.$ Dacă $\det\left(A+\varepsilon\cdot I_2\right)=0\Rightarrow$ prin calcul direct obţinem detA=1 şi TrA=-1. Analog pentru $\det\left(A+\bar{\varepsilon}\cdot I_2\right)=0.$ Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix};$ Atunci $A+\varepsilon\cdot I_2=\begin{pmatrix}a+\varepsilon & b\\ c & d+\varepsilon\end{pmatrix};\det\left(A+\varepsilon\cdot I_2\right)=0\Rightarrow$ $(a+\varepsilon)\cdot(d+\varepsilon)-b\cdot c=0\Rightarrow$ $\frac{a+d}{2}+ad-bc-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\cdot(a+d+1)=0$ şi $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $a+d=-1$ şi $ad-bc=1;$ Din ecuaţia Cayley-Hamilton obţinem $A^2+A+I_2=O_2;$ Adunăm în ambii membri matricea $(x-1)\cdot A$ şi obţinem $A^2+x\cdot A+I_2=(x-1)\cdot A$ şi $\det\left(A^2+x\cdot A+I_2\right)=(x-1)^2.$ *Obs.* Relaţia $A^2+A+I_2=O_2$ se poate obţine arătând că rădăcinile polinomului caracteristic $f_A(X)=\det\left(A-X\cdot I_2\right)$ sunt $-\varepsilon$ şi $-\bar{\varepsilon}$, deci $f_A(X)=X^2+\left(\varepsilon+\bar{\varepsilon}\right)\cdot X+\varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=X^2+X+1$ şi $f_A(A)=O_2.$	1p 1p 2p 1p 2p
3.	Scriem matricea sub forma $A=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{q}}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{q} & \sin\frac{\pi}{q}\\ -\sin\frac{\pi}{q} & \cos\frac{\pi}{q}\end{pmatrix}.$	**1p**
	Demonstrăm prin inducţie matematică propoziţia: $P_{(n)}:A^n=\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^n}\begin{pmatrix}\cos\frac{n\cdot\pi}{q} & \sin\frac{n\cdot\pi}{q}\\ -\sin\frac{n\cdot\pi}{q} & \cos\frac{n\cdot\pi}{q}\end{pmatrix},\ n\in\mathbb{N}^*;$ Obţinem $x_n=\frac{\cos\frac{n\cdot\pi}{q}}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^n};y_n=\frac{\sin\frac{n\cdot\pi}{q}}{\left(\sin\frac{\pi}{q}\right)^n},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*.$	**2p**

	b). Arătăm că $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ conţine subşiruri cu limite diferite. Fie $x_{2nq}=\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{2nq}}\to\infty$ şi $x_{(2n+1)q}=-\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{(2n+1)q}}\to-\infty,$ deci este divergent. Analog, pentru $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$. Alegem subşirurile $\left(y_{2nq+1}\right)_{n\geq 1},\left(y_{(2n+1)q}\right)_{n\geq 1}$ şi obţinem $y_{2nq+1}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{q}}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{2nq+1}}=\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{2nq}}\to\infty$ $y_{(2n+1)\cdot q}=\dfrac{\sin(2n+1)\pi}{\left(\sin\dfrac{\pi}{q}\right)^{(2n+1)q}}=0\to 0,$ deci $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ este divergent. Obs. Putem demonstra că şirurile $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$ şi $\left(y_n\right)_{n\geq 1}$ sunt periodice : $y_{n+2q}=y_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_{n+2q}=x_n,\forall n\in\mathbb{N}^*.$	2p 2p
4.	a). Pentru că $x_{n+1}\leq x_n,\forall n\in\mathbb{N}$ şi f este crescătoare, avem că $f\left(x_{n+1}\right)\leq f\left(x_n\right)$, deci $\left(f\left(x_n\right)\right)_{n\geq 0}$ este descrescător. Din $f\left(x_n\right)>0\Rightarrow$ şirul este minorat şi conform teoremei lui Weierstrass este convergent.	**2p** **1p**

	Fie $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$. Avem că $l\geq 0$. Să demonstrăm că *l=0*. Presupunem prin reducere la absurd că $l>0$. Pentru că $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător şi nemărginit rezultă că $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, adică $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_{n_\varepsilon}<-\varepsilon$. Pentru $\forall n\geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n \leq x_{n_\varepsilon}<-\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.	**1p**
	Din *f* crescătoare, rezultă că există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ şi din caracterizarea cu şiruri a limitei, rezultă că pentru $x_n\to-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l>0$.	**1p**
	Din caracterizarea limitei, obţinem: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$, astfel încât din $x<-\delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Dacă alegem $\varepsilon=\frac{l}{2} \Rightarrow \exists \delta_l>0$ astfel încât pentru $x<-\delta_l \Rightarrow$ $f(x)\in\left(\frac{l}{2},\frac{3l}{2}\right)$;	**1p**
	Dacă alegem $y>x, x<-\delta_l \Rightarrow \mathrm{f}(y)>f(x)>\frac{l}{2}$, adică $\mathrm{f}(x)\neq\frac{l}{4}, \forall x\in\mathbb{R}$, fals, pentru că f este surjectivă. Aşadar , *l*=0	**1p**
	Metoda 2. Din f crescătoare și surjectivă, rezultă că $\mathrm{Im}\, f=(0,\infty)$ și *f* continuă. (justificare) Deoarece *f* este crescătoare, rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; Deoarece $x_n\to-\infty$, folosind definiţia limitei cu şiruri, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.	