MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2014. február 23

VIII. OSZTÁLY

1.) **a.)** Bontsd két tényező szorzatára az $x^4 + 4y^4$ kifejezést, ahol $x, y \in \mathbb{N}^*$.

b.) Mutasd ki, hogy a $2^{118} + 13^4$ szám összetett szám!

2.) Határozd meg az $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 + 2y + 10}$ kifejezés minimális értékét, valamint az x és y értékét, amelyre a kifejezés értéke egyenlő a minimumával!

3.) Adva vannak az A, B, C, D nem koplanáris pontok és M, N, P, Q az [AC], [BM], [NC], illetve [BP] szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy az A, N, Q, D pontok egy síkban vannak és MP || (AQD)!

4.) Az AEDC négyzet és az AEFB téglalap különböző síkokban vannak, a DE és AB egyenesek merőlegesek egymásra. Ha CD= 1 cm és EF= $\sqrt{3}$ cm, akkor számítsd ki a d(A,BD) távolságot!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPADA DE MATEMATICA
ETAPA LOCALĂ
23 februarie 2014

BAREM
CLASA A VIII-A

1.	**Din oficiu**	**1p**
a)	$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$	**3p**
	Descompunerea $(x^2 + 2y^2 + 2xy)((x^2 + 2y^2 - 2xy)$	**2p**
b)	$(2^{59})^2 + (13^2)^2 + 2\cdot 2^{59}\cdot 13^2 - 2^{60}\cdot 13^2 = (2^{59} + 13^2)^2 - (2^{30}\cdot 13)^2$	**2p**
	Descompunerea $(2^{59} + 13^2 + 2^{30}\cdot 13)(2^{59} + 13^2 - 2^{30}\cdot 13)$. Deci, numărul dat este compus	**2p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	$\sqrt{(x-3)^2+4}+\sqrt{(y+1)^2+9}$	**4p**
	$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x-3)^2 \geq 0$ de unde avem $(x-3)^2+4 \geq 4$ și $\sqrt{(x-3)^2+4} \geq 2$ cu egalitate dacă $x=3$	**2p**
	$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow (y+1)^2 \geq 0$ de unde avem $(y+1)^2+9 \geq 9$ și $\sqrt{(y+1)^2+9} \geq 3$ cu egalitate dacă $y=-1$	**2p**
	Valoarea minimă a expresiei este 5 și expresia are această valoare pentru $x=3$ și $y=-1$	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	În triunghiul ANC , MP este linie mijlocie ⇒MP ‖ AN (1)	**3p**
	În triunghiul BMP , NQ este linie mijlocie⇒NQ ‖ MP (2)	**3p**
	Din relaţiile (1), (2) rezultă, că punctele A, N, Q sunt coliniare şi (AQ, AD) = α, deci A, N, Q, D ∈ α	**2p**
	Deoarece MP ‖ AN şi AN ⊂ α ⇒MP ‖ α, unde α = (AQD)	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	DE ⊥ AB AB‖EF ⇒ DE ⊥ EF	**1p**
	Calculează în Δ-ul FEB: EB=2 cm Calculează în Δ-ul DEB: DB=$\sqrt{5}$ cm	**1p** **2p**
	ΔDAB: DB=$\sqrt{5}$ cm, AD=$\sqrt{2}$ cm, AB=$\sqrt{3}$ cm ⇒ Δ-ul drepunghic în A Fie AM ⊥ BD, deci d(A,BD)=AM=$\frac{AD\cdot AB}{BD}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$	**3p** **2p**