



**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024 –**

**CLASA a XII-a
SECȚIUNEA H1 – filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

Subiectul 1

Pe mulțimea numerelor raționale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$.

3p a) Arătați că mulțimea numerelor întregi impare este parte stabilă a mulțimii \mathbb{Q} , în raport cu legea dată.

4p b) Determinați valoarea expresiei $E = (-1)^{n^2+n} * (-1)^{n^2+n+1} * (-1)^{n^2+n+2} * \dots * (-1)^{n^2+n+2024}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul 2

Se consideră monoidul comutativ (G, \circ) , unde $G = (1, +\infty)$ și $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$, pentru $\forall x, y \in G$.

3p a) Arătați că (G, \circ) este grup abelian.

4p b) Determinați numerele reale a și b pentru care funcția $g: (0, +\infty) \rightarrow G$, $f(x) = \sqrt{ax + b}$ este izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul (G, \circ) .

Subiectul 3

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$.

3p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este convexă.

4p b) Determinați primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{e^x}}$, pentru care

$$G(2) = \frac{1}{2} \ln(4 + 2\sqrt{5}).$$

Subiectul 4

Se consideră funcțiile $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{1 + |x - a|}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

3p a) Arătați că $\int_0^2 f_2(x) dx = \ln 3$.

4p b) Calculați $\int_0^2 f_a(x) dx$.