OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA
13.02.2014

CLASA a XI-a

Problema 1.

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$.

b) Arătaţi că există două şiruri de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât să avem $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2, (\forall) n \geq 1$ şi apoi calculaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2x_n}{3^n + 1}\right)^{3^n}.$$

Problema 2.

Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Notăm $tr(A) = a + d$.

a) Arătaţi că $A^2 - tr(A) \cdot A + det(A) \cdot I_2 = O_2$.

b) Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$, arătaţi că $A^2 = O_2$.

c) Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$, arătaţi că $det(I_2 + AXA) = 1$, pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problema 3.

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $\begin{cases} x_1 \in (0,1) \\ x_{n+1} = x_n - x_n^4, (\forall) n \geq 1 \end{cases}$.

a) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x_n^3)^n$.

Problema 4.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că

$$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n}, (\forall) n \geq 1.$$

Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

NOTĂ : Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

BAREM OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, JUDEȚUL ALBA

13.02.2014

BAREM DE CORECTARE

CLASA a XI-a

Problema 1.

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătaţi că $A^2 - 4A + 3I_2 = O_2$.

b) Arătaţi că există două şiruri de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ astfel încât să avem $A^n = x_n \cdot A + y_n \cdot I_2, (\forall) n \geq 1$ şi apoi calculaţi limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2x_n}{3^n + 1}\right)^{3^n}.$$

Soluţie şi barem:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$ **1p**

Finalizare **1p**

b) $x_1 = 1, y_1 = 0;\ x_2 = 4, y_2 = -3$ **1p**

$A^{n+1} = A^n \cdot A = (x_n \cdot A + y_n \cdot I_2) \cdot A = x_n \cdot A^2 + y_n \cdot A = (4x_n + y_n) \cdot A - 3x_n \cdot I_2$,

de unde obţinem $x_{n+1} = 4x_n + y_n$ şi $y_{n+1} = -3x_n, (\forall)\ n \geq 1$ **1p**

$x_{n+1} - 4x_n + 3x_{n-1} = 0, (\forall)\ n \geq 2 \implies x_n = \frac{3^n - 1}{2}$ şi $y_n = \frac{3 - 3^n}{2}$, $(\forall)\ n \geq 1$ **2p**

$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n - 1}{3^n + 1}\right)^{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{3^n + 1}\right)^{3^n} = e^{-2}$ **1p**

Problema 2.

Se dă matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Notăm $tr(A) = a + d$.

a) Arătaţi că $A^2 - tr(A) \cdot A + det(A) \cdot I_2 = O_2$.

b) Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$, arătaţi că $A^2 = O_2$.

c) Dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n = O_2$, arătaţi că $det(I_2 + AXA) = 1$, pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soluţie şi barem:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ **1p**

Finalizare **1p**

b) $det(A) = 0 \implies A^2 = tA$, unde $t = tr(A)$ **1p**

$A^n = t^{n-1}A, (\forall) n \geq 1$ **1p**

$t = 0$ sau $A = O_2$, de unde rezultă $A^2 = O_2$ **1p**

c) $det(I_2 + AXA) = det(I_2 + XA^2) = det(I_2) = 1, (\forall) X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **2p**

Problema 3.

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $\begin{cases} x_1 \in (0,1) \\ x_{n+1} = x_n - x_n^4, (\forall) n \geq 1 \end{cases}$.

a) Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

b) Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} (1 + x_n^3)^n$.

Soluţie şi barem:

a) $x_n \in (0,1)$ şi x_n strict descrescător , deci x_n este convergent ……………………………. **2p**

Din relaţia de recurenţă, obţinem că x_n are limita egală cu 0 .... **1p**

b) $l = \lim_{n\to\infty} n \cdot x_n^3 = \frac{n+1-n}{1/x_{n+1}^3 - 1/x_n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 \cdot x_{n+1}^3}{x_n^3 - x_{n+1}^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 \cdot x_{n+1}^3}{x_n^3 - x_n^3(1-x_n^3)^3}$ ……… **2p**

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3(1-x_n^3)^3}{1-(1-x_n^3)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x_n^3)^3}{3 - 3x_n^3 + x_n^6} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \cdot x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ …………… **1p**

c) $\lim_{n\to\infty} (1 + x_n^3)^n = \lim_{n\to\infty} \left[(1 + x_n^3)^{1/x_n^3}\right]^{n\cdot x_n^3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$ ……………………………………….. **1p**

Problema 4.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că

$$\sqrt{n \cdot x_n + n + 1} - \sqrt{n \cdot x_n + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \leq \sqrt{n \cdot x_n + n} - \sqrt{n \cdot x_n}, (\forall) n \geq 1.$$

Calculaţi limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Soluţie şi barem:

$\sqrt{1 + x_n + \frac{1}{n}} - \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2} \leq \sqrt{1 + x_n} - \sqrt{x_n}, (\forall) n \geq 1$ **1p**

$\sqrt{1 + x_n + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \Longrightarrow \frac{9}{16} \leq x_n + \frac{1}{n}$, $(\forall) n \geq 1$ **2p**

$\frac{1}{2} + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{1 + x_n} \Longrightarrow x_n \leq \frac{9}{16}, (\forall) n \geq 1$ **2p**

$0 \leq \frac{9}{16} - x_n \leq \frac{1}{n}$, deci şirul x_n este convergent către $\frac{9}{16}$ **2p**