

## S.S.M.R - FILIALA MURES

## Olimpiada de matematică

Faza locală 9.02.2013

Clasa a XI-a

## Barem de evaluare

**Problema1.** Fie  $A, B \in M_2(\mathbf{C})$  astfel încât:  $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$  și  $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$

Aflați  $x$  și  $y$ .

*Gazeta Matematică*

**SOLUȚIE**

$\det(AB) = \det A \cdot \det B \dots\dots 1\text{punct}$ ,  $\det(AB) = \det(BA) \Rightarrow xy = 200 \dots\dots 1\text{punct}$

Fie  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ .

Din  $A \cdot B \Rightarrow \begin{cases} ap + br = 10 \\ cq + ds = 20 \end{cases}$ , respectiv din  $BA \Rightarrow \begin{cases} ap + cq = x \\ br + ds = y \end{cases} \dots\dots 1\text{punct}$

de unde  $x - 10 = cq - br$  și  $20 - y = cq - br$  deci  $x - 10 = 20 - y \Rightarrow x + y = 30 \dots\dots 1\text{punct}$

$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 200 \end{cases} \quad 1\text{punct} \quad \mathbf{1\ punct}$

$\Rightarrow x = 10, y = 20, \text{ sau } x = 20, y = 10$

**Din oficiu 1punct**

**Probleme2.** Fie  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  astfel încât  $A + B = A \cdot B$  și  $\det(A + B) > 0$ .

Să se arate că: a)  $A^{-1} + B^{-1} = I_n$ ; b)  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ ; c)  $\det(A \cdot B - 2I_n) \geq 0$ .

**SOLUȚIE**

a)  $A + B = A \cdot B \Rightarrow \det(A + B) = \det(A \cdot B) > 0$ . Deci  $\det A \neq 0$  și  $\det B \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}, B^{-1} \dots\dots 1\text{punct}$

$$A^{-1} \cdot |A + B = A \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B$$

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

$$A^{-1} \cdot A + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B \Big| \cdot B^{-1} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B^{-1} + A^{-1} \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

de unde folosind asociativitatea înmulțiri matricelor obținem  $A^{-1} + B^{-1} = I_n \dots\dots\dots 1\text{punct}$

**b)** Demonstrăm că din  $A + B = A \cdot B$  rezultă că  $A \cdot B = B \cdot A$

$$A + B = A \cdot B \Rightarrow A \cdot B - A - B = O_n \Rightarrow A \cdot B - A - B + I_n = I_n \Rightarrow A \cdot (B - I_n) - (B - I_n) = I_n \text{ de unde}$$

$$(A - I_n) \cdot (B - I_n) = I_n \Rightarrow \det(A - I_n) \cdot \det(B - I_n) = 1, \text{ deci } \det(A - I_n) \neq 0 \Rightarrow \exists (A - I_n)^{-1}.$$

Înmulțim egalitatea  $(A - I_n) \cdot (B - I_n) = I_n$  cu  $(A - I_n)^{-1}$  din stânga și cu  $(A - I_n)$  din dreapta.

$$(A - I_n)^{-1} \cdot (A - I_n) \cdot (B - I_n) = I_n \Big| (A - I_n) \Rightarrow (B - I_n)(A - I_n) = I_n \text{ de unde } B \cdot A - B - A + I_n = I_n \text{ dar}$$

$$A \cdot B - A - B + I_n = I_n \text{ deci } A \cdot B = B \cdot A \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

**Dacă  $\bar{X} \in M_n(\mathbf{C})$  este conjugata matricei  $X \in M_n(\mathbf{C})$ , atunci se știe că  $\det \bar{X} = \overline{\det X}$  și  $\det X \cdot \det \bar{X} \geq 0$ .**

Fie  $X = A + iB$  și  $\bar{X} = A - iB$  de unde având în vedere că  $A \cdot B = B \cdot A$  rezultă că

$$\det[(A + iB) \cdot (A - iB)] = \det(A^2 + B^2) \geq 0 \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

$$\text{c) } (A + B)^2 = (A \cdot B)^2 \Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB = (A \cdot B)^2, \text{ de unde } A^2 + B^2 = AB(AB - 2I_n)$$

De unde  $\det(A^2 + B^2) = \det(AB) \cdot \det(AB - 2I_n) \geq 0$ , dar  $\det(A \cdot B) > 0$  deci obținem

$$\det(A \cdot B - 2I_n) \geq 0 \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

**Din oficiu 1punct**

**Probleme3.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:  $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2x_n + 2} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$ , unde  $x_1 = a \in \mathbf{R}$ .

a) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze limita șirului.

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n x_k - n \right)$ .

**SOLUȚIE**

$$\text{Din } x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2x_n + 2} \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{(x_n - 1)^2 + 1} \Rightarrow x_n \geq 1, \forall n \geq 2 \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2(1 - x_n)}{\sqrt{x_n^2 - 2x_n + 2} + x_n} \leq 0, \forall n \geq 1 \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Deci șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  descrescător și  $1 \leq x_n \leq x_2, \forall n \geq 2 \Rightarrow$  șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent....1punct

Fie  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , din relația de recurență rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  .....1punct

b) Din  $x_{k+1}^2 - x_k^2 = -2(x_k - 1), \forall k \geq 1$ , dând lui  $k$  valori de la 1 la  $n$  și adunând relațiile obținute rezultă punct  $x_{n+1}^2 - x_1^2 = -2\left(\sum_{k=1}^n x_k - n\right)$  .....1punct

De unde trecând la limită se obține punct  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n x_k - n\right) = \frac{a^2 - 1}{2}$  .....1punct

**Din oficiu 1punct**

**Problema 4.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit astfel:  $x_0 > 0, x_n = x_{n-1} \cdot (2 - ax_{n-1}), \forall n \in \mathbf{N}^*$ , unde  $a > 0$  un număr fixat. Dacă  $x_1 > 0$ , să se calculeze limita șirului.

**SOLUȚIE**

Din relația  $x_n = x_{n-1}(2 - ax_{n-1})$ , obținem  $1 - ax_n = (1 - ax_{n-1})^2, \forall n \in \mathbf{N}^*$  ..2puncte

Folosind metoda inducției matematice se poate demonstra că  $1 - ax_n = (1 - ax_0)^{2^n}, \forall n \in \mathbf{N}$  ..2puncte

Deoarece  $x_1 = x_0(2 - ax_0) > 0, x_0 > 0$ , rezultă că  $2 - ax_0 > 0 \Rightarrow 1 - ax_0 > -1$ ; dar  $1 - ax_0 < 1$ , deci  $|1 - ax_0| < 1$ . Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - ax_0)^{2^n} = 0$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - ax_n) = 0$ , de unde  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent și

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{a}$  .....2puncte

**Din oficiu 1punct**

## S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică  
Faza locală 9.02.2013  
Clasa a XI-a

**Problema1.** Fie  $A, B \in M_2(\mathbf{C})$  astfel încât:  $AB = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$  și  $BA = \begin{pmatrix} x & 60 \\ 2 & y \end{pmatrix}$

Aflați  $x$  și  $y$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema2.** Fie  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  astfel încât  $A + B = A \cdot B$  și  $\det(A + B) > 0$ .

Să se arate că: a)  $A^{-1} + B^{-1} = I_n$ ; b)  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ ; c)  $\det(A \cdot B - 2I_n) \geq 0$ .

**Problema3.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit astfel:  $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 2x_n + 2} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$ , unde  $x_1 = a \in \mathbf{R}$ .

a) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent și să se calculeze limita șirului.

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n x_k - n \right)$ .

**Problema 4.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit astfel:  $x_0 > 0$ ,  $x_n = x_{n-1} \cdot (2 - ax_{n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ , unde  $a > 0$  un număr fixat. Dacă  $x_1 > 0$ , să se calculeze limita șirului.

**Notă:**

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Problemele propuse de: prof. Ilie Ștefan, prof. Matefi Istvan