Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală

Clasa a VIII-a

Craiova, 16 februarie 2014

Problema 1. Să se demonstreze că pentru orice numere reale a şi b avem inegalitatea

$$a^2 + b^2 - ab - a - b + 1 \geq 0.$$

Să se găsească a şi b astfel încât în relaţia de mai sus să avem egalitate.

***

Problema 2. In paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M, N, respectiv P proiecţiile punctului C pe dreptele AB', AD', respectiv $B'D'$. Demonstraţi că dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.

GM 3/2012

Problema 3. Să se afle numărul natural n ce verifică relaţia

$$\left[\frac{2n^2}{n+1}\right] = n,$$

unde, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ reprezintă partea întregă a lui x.

***

Problema 4. Considerăm tetraedrul $ABCD$ cu $BC \perp CD$ şi $\|BC\| = \|CD\|$. Fie M mijlocul segmentului $[BD]$. Să se arate că dacă $AM \perp BC$, atunci $\|AB\| = \|AC\|$.

***

Notă:
1. Timp de lucru: 3 ore
2. Toate subiectele sunt obligatorii
3. Fiecare problemă se va nota cu puncte de la 1 la 7 (un punct din oficiu)

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală

Clasa a VIII-a

Craiova, 16 februarie 2014

Soluţii

Problema 1. Avem

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-ab-a-b+1 && \geq 0 \\ \iff & 2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2 && \geq 0 \\ \iff & (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 && \geq 0, \end{aligned}$$

aşadar inegalitatea se verifică.

Pentru a avea egalitate în relaţia de mai sus va trebui să avem $a-b=a-1=b-1=0$, deci $a=b=1$.

Problema 2. Cum $CB \perp (ABB')$, $CM \perp AB'$ şi $AB' \subset (ABB')$, din reciproca teoremei celor trei perpendiculare se obţine $BM \perp AB'$. Analog obţinem $DN \perp AD'$, $C'P \perp B'D'$. Dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt incluse în planul $(AB'D')$. Cum $\triangle ABB'$ este dreptunghic şi $BM \perp AB'$, se obţine $\triangle B'MB \simeq \triangle BMA$. De aici avem

$$\frac{\|MB'\|}{\|MB\|}=\frac{\|MB\|}{\|MA\|}=\frac{\|BB'\|}{\|AB\|},$$

şi deci $\frac{\|MB'\|}{\|MA\|}=\frac{\|BB'\|^2}{\|AB\|^2}$. Analog $\frac{\|PD'\|}{\|PB'\|}=\frac{\|D'C'\|^2}{\|B'C'\|^2}$ şi $\frac{\|NA\|}{\|ND'\|}=\frac{\|AD\|^2}{\|DD'\|^2}$. Va rezulta

$$\begin{aligned} \frac{\|MB'\|}{\|MB\|}\cdot\frac{\|PD'\|}{\|PB'\|}\cdot\frac{\|NA\|}{\|ND'\|} &= \frac{\|BB'\|^2}{\|AB\|^2}\cdot\frac{\|D'C'\|^2}{\|B'C'\|^2}\cdot\frac{\|AD\|^2}{\|DD'\|^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

deoarece $\|AB\|=\|D'C'\|$, $\|BB'\|=\|DD'\|$ şi $\|AD\|=\|B'C'\|$. Din reciproca teoremei lui Ceva rezultă că dreptele AP, $B'N$ şi $D'N$ sunt concurente.

Problema 3. Avem

$$\begin{aligned} & \tfrac{2n^2}{n+1} && \geq n+1 \\ \iff & 2n^2 && \geq n^2+2n+1 \\ \iff & n^2-2n+1 && \geq 2 \\ \iff & (n-1)^2 && \geq 2. \end{aligned}$$

Este evident că pentru $n \geq 3$ ultima inegalitate se verifică, deci $\left[\frac{2n^2}{n+1}\right] \geq n+1 > n$ şi egalitatea din problemă nu mai poate avea loc. Pentru $n = 2$ obţinem $\left[\frac{8}{3}\right] = 2$, pentru $n = 1$ obţinem $[1] = 1$ iar pentru $n = 0$ obţinem $[0] = 0$, deci soluţiile problemei sunt $n = 0$, 1 şi 2.

Problema 4. Fie N mijlocul lui $[BC]$. Cum MN este linie mijlocie în $\triangle BCD$, deci $MN \parallel CD$ şi $CD \perp BC$, vom avea $MN \perp BC$. Deoarece şi $AM \perp BC$, vom avea $BC \perp (AMN)$, prin urmare $AN \perp BC$. In consecinţă, în $\triangle ABC$ segmentul $[AN]$ este şi înălţime şi mediană, aşadar $\triangle ABC$ este isoscel, deci $\|AB\| = \|AC\|$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală

Clasa a VIII-a

Craiova, 16 februarie 2014

Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu ____ 1p.
$a^2+b^2-ab-a-b+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2 \geq 0$ ____ 3p.
$2a^2+2b^2-2ab-2a-2b+2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$ ____ 2p.
$a^2+b^2-ab-a-b+1=0$ rezultă $a=b=1$ ____ 1p.
Total ____ 7p.

Problema 2.

Oficiu ____ 1p.
$BM \perp AB'$, $DN \perp AD'$, $C'P \perp B'D'$ ____ 1p.
$\frac{\|MB'\|}{\|MA\|} = \frac{\|BB'\|^2}{\|AB\|^2}$ şi relaţiile analoage ____ 2p.
$\frac{\|MB'\|}{\|MB\|} \cdot \frac{\|PD'\|}{\|PB'\|} \cdot \frac{\|NA\|}{\|ND'\|} = 1$ ____ 2p.
Dreptele AP, $B'N$ şi $D'N$ sunt concurente ____ 1p.
Total ____ 7p.

Problema 3.

Oficiu ____ 1p.
$\frac{2n^2}{n+1} \geq n+1 \Longleftrightarrow (n-1)^2 \geq 2$ ____ 2p.
Pentru $n \geq 3$ avem $\left[\frac{2n^2}{n+1}\right] \geq n+1 > n$ ____ 2p.
Soluţiile problemei sunt $n=0$, 1 şi 2 ____ 2p.
Total ____ 7p.

Problema 4.

Oficiu ____ 1p.
N mijlocul lui $[BC]$, $MN \perp BC$ ____ 1p.
$BC \perp (AMN)$ ____ 2p.
$AN \perp BC$ ____ 1p.
$[AN]$ este şi înălţime şi mediană în $\triangle ABC$ ____ 1p
$\triangle ABC$ este isoscel $\Longrightarrow \|AB\| = \|AC\|$ ____ 1p.
Total ____ 7p.