Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a VI-a

Problema 1.

Se consideră punctele distincte *A, B, C, D* astfel încât punctul *B* este mijlocul segmentului (AC) şi punctul C este mijlocul segmentului (BD). Să se demonstreze că:

a). $BC=\frac{AC+BD}{4}$

b). $\frac{1}{AC}+\frac{1}{BD}<\frac{4}{AD}$.

Problema 2.

Fie $[OB\subset Int(\measuredangle AOD),[OC\subset Int(\measuredangle BOD)$ şi $[OM$, $[ON$, $[OP$, $[OQ$, $[OR$, respectiv bisectoarele unghiurilor $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle AOC$, $\measuredangle COD$, $\measuredangle AOD$. Aflaţi măsura unghiului $\measuredangle AOB$ ştiind că diferenţa dintre măsurile unghiurilor $\measuredangle ROQ$ şi $\measuredangle MOP$ este de 15^0.

Problema 3.

a). Să se determine numerele naturale x, y, z, t, ştiind că îndeplinesc simultan condiţiile:

1. $x+y+z\cdot t=2015$
2. $\frac{x+y}{z\cdot t}=\frac{1}{4}$
3. $(x,y)=31$
4. $[z,t]=806$

b). Notând *(x, y, z, t)* o soluţie, să se calculeze numărul de soluţii care îndeplinesc simultan condiţiile date la punctul a).

Problema 4 .

a). Să se efectueze:

$$165:15;\quad 1665:15;\quad 16665:15;\quad \underbrace{1666...65}_{n\ cifre\ \text{de}\ 6}:15.$$

b). Să se rezolve în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$\left[\left(\frac{2}{5}+\frac{22}{55}+...+\frac{\overbrace{22...2}^{2015cifre}}{\underbrace{55...5}_{2015cifre}}\right):\frac{2}{5}-\frac{\overbrace{166...65}^{2015cifre6}}{\underbrace{500...0}_{2015cifre0}}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+...+\frac{1}{\underbrace{500...0}_{2015cifre0}}\right)\right]^n\left(\frac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+...+\frac{1}{\underbrace{100...01}_{2015cifre0}}}{\frac{1}{22}+\frac{1}{202}+...+\frac{1}{\underbrace{200...02}_{2015cifre0}}}\right)^{n+1}=8000$$

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1	a) Punctul B este mijlocul segmentului $(AC) \Rightarrow B \in (AC), (AB) \equiv (BC)$; $B \in (AC) \Rightarrow A, B, C$ puncte coliniare; (1) Punctul C este mijlocul segmentului $(BD) \Rightarrow C \in (BD), (BC) \equiv (CD)$; $C \in (BD) \Rightarrow B, C, D$ puncte coliniare; (2) Din (1) şi (2) rezultă că A, B, C, D sunt coliniare.	1p 1p
	$\left.\begin{array}{l}(AB) \equiv (BC) \Rightarrow 2 \cdot BC = AC \\ (BC) \equiv (CD) \Rightarrow 2 \cdot BC = BD\end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot BC = AC + BD \Rightarrow BC = \dfrac{AC + BD}{4}$.	2p
	b). $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{2 \cdot BC} + \dfrac{1}{2 \cdot BC} =$ $= \dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{\frac{AD}{3}} =$ $= \dfrac{3}{AD} < \dfrac{4}{AD}$.	1p 1p 1p
2	$m(\measuredangle ROQ) = m(\measuredangle ROD) - m(\measuredangle QOD) =$ $= \dfrac{1}{2} m(\measuredangle AOD) - \dfrac{1}{2} m(\measuredangle COD) = \dfrac{1}{2} m(\measuredangle AOC)$ $m(\measuredangle MOP) = m(\measuredangle AOP) - m(\measuredangle AOM) =$ $= \dfrac{1}{2} m(\measuredangle AOC) - \dfrac{1}{2} m(\measuredangle AOB) = \dfrac{1}{2} m(\measuredangle BOC)$.	2p 2p

	Deducem din cele două şiruri de egalităţi că $m(\measuredangle ROQ)-m(\measuredangle MOP)=\frac{1}{2}m(\measuredangle AOC)-\frac{1}{2}m(\measuredangle BOC)=$ $\frac{1}{2}m(AOB)=15^\circ \Rightarrow m(\measuredangle AOB)=30^\circ$	2p 1p
3	a) $\frac{x+y}{z\cdot t}=\frac{1}{4}\Rightarrow z\cdot t=4\cdot(x+y)$ Înlocuind în condiţia 1 $\Rightarrow 5\cdot(x+y)=2015\Rightarrow x+y=403\Rightarrow z\cdot t=1612,$ $(x,y)=31\Rightarrow \exists m,n\in\mathbb{N},\ (m,n)=1,$ astfel încât $x=31\cdot m,\ y=31\cdot n.$ $x+y=403\Rightarrow 31\cdot m+31\cdot n=403\Rightarrow m+n=13;$ $\left.\begin{matrix} m+n=13 \\ (m,n)=1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$ $\begin{cases} m=1 \\ n=12 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=31 \\ y=372 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} m=2 \\ n=11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=62 \\ y=341 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} m=3 \\ n=10 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=93 \\ y=310 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} m=4 \\ n=9 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=124 \\ y=279 \end{cases}$ *sau* . . . $\begin{cases} m=12 \\ n=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=372 \\ y=31 \end{cases}$ Aşadar, există 12 perechi de numere de forma $(x,y)\in\{(31,372),(62,341),(93,310),...,(372,31)\}$	2p 2p

	$\begin{cases} z\cdot t=1612 \\ [z,t]=806 \\ [z,t]\cdot(z,t)=z\cdot t \end{cases} \Rightarrow (z,t)=2;$ $(z,t)=2\Rightarrow(\exists)\, p,q\in\mathbb{N},\ (p,q)=1,$ astfel încât $z=2\cdot p,\ t=2\cdot q$; $\begin{cases} z\cdot t=1612 \\ z=2\cdot p \\ t=2\cdot q \end{cases} \Rightarrow p\cdot q=403;$ $\begin{cases} p\cdot q=403=13\cdot 31 \\ (p,q)=1 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} p=13 \\ q=31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=26 \\ t=62 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} p=31 \\ q=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=62 \\ t=26 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} p=403 \\ q=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=806 \\ t=2 \end{cases}$ *sau* $\begin{cases} p=1 \\ q=403 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2 \\ t=806 \end{cases}$ Aşadar, există 4 perechi de numere de forma $(z,t)\in\{(2,806),(26,62),(806,2),(62,26)\}$.	2p
	b) Numărul soluţiilor de forma *(x, y, z, t)* care îndeplinesc simultan condiţiile date este $12\cdot 4=48$.	1p
	a). $165:15=11$ $1665:15=111$ $16665:15=1111$ $\underbrace{1666...65}_{n\ cifre\ \text{de } 6}:15=\underbrace{111...11}_{(n+1)cifre\ \text{de } 1}$	1p 1p

4	$\frac{2}{5}+\frac{22}{55}+\ldots+\frac{\overbrace{22\ldots2}^{2015cifre}}{\underbrace{55\ldots5}_{2015cifre}}=\underbrace{\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{5}}_{2015termeni}=2015\cdot\frac{2}{5}$ $\overbrace{166\ldots65}^{2015cifre=6}=15\cdot\overbrace{111\ldots11}^{2016cifre=1}$;	1p
	$\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{500\ldots0}_{2015cifre=0}}=\frac{2}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\ldots+\frac{2}{\underbrace{100\ldots0}_{2016cifre=0}}=$ $=\underbrace{0,222\ldots2}_{2016cifre=2}=\frac{\overbrace{222\ldots2}^{2016cifre=2}}{\underbrace{1000\ldots0}_{2016cifre=0}}=\frac{\overbrace{111\ldots1}^{2016cifre=1}}{\underbrace{5000\ldots0}_{2015cifre=0}}$.	1p
	$\frac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{100\ldots01}_{2015cifre0}}}{\frac{1}{22}+\frac{1}{202}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{200\ldots02}_{2015cifre0}}}=\frac{\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{100\ldots01}_{2015cifre0}}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{100\ldots01}_{2015cifre0}}\right)}=2$	1p
	Ecuaţia devine: $\left(2015-15\cdot\frac{\overbrace{111\ldots1}^{2016cifre=1}}{\underbrace{5000\ldots0}_{2015cifre=0}}:\frac{\overbrace{111\ldots1}^{2016cifre=1}}{\underbrace{5000\ldots0}_{2015cifre=0}}\right)^n\cdot2^{n+1}=8000\Leftrightarrow$ $2000^n\cdot2^n\cdot2=8000\Leftrightarrow4000^n=4000\Rightarrow n=1.$	1p 1p