Marţi, 8 iulie 2014

Problema 1. Fie $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ un şir infinit de numere întregi strict pozitive. Demonstraţi că există şi este unic numărul întreg $n \geq 1$, astfel încât

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Considerăm o tablă de şah $n \times n$, alcătuită din n^2 pătrate unitate. O configuraţie de n turnuri de pe această tablă se numeşte *paşnică* dacă fiecare linie şi fiecare coloană a tablei conţine exact un turn. Aflaţi cel mai mare număr întreg k care are proprietatea: pentru orice configuraţie paşnică de n turnuri există un pătrat $k \times k$, alcătuit din k^2 pătrate unitate ale tablei, care nu conţine niciun turn al configuraţiei.

Problema 3. Patrulaterul convex $ABCD$ are $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punctul H este piciorul perpendicularei din A pe BD. Punctele S şi T se află pe laturile (AB), respectiv (AD), astfel încât H se află în interiorul triunghiului SCT şi

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°.$$

Demonstraţi că dreapta BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului TSH.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Miercuri, 9 iulie 2014

Problema 4. Punctele P şi Q se află pe latura (BC) a triunghiului ascuţitunghic ABC, astfel încât $\angle PAB = \angle BCA$ şi $\angle CAQ = \angle ABC$. Punctele M şi N se află pe dreptele AP, respectiv AQ, astfel încât P este mijlocul lui (AM) şi Q este mijlocul lui (AN). Demonstraţi că dreptele BM şi CN se intersectează pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Problema 5. Banca „Cape Town" emite monede cu valoarea $\frac{1}{n}$, oricare ar fi numărul întreg strict pozitiv n. Dându-se o colecţie finită de astfel de monede (nu neapărat de valori diferite), având valoarea totală cel mult $99 + \frac{1}{2}$, demonstraţi că este posibil să împărţim această colecţie în cel mult 100 de grupe, astfel încât fiecare grupă să aibă valoarea totală cel mult 1.

Problema 6. Spunem că o mulţime de drepte din plan este *în poziţie generală* dacă ea nu conţine nicio pereche de drepte paralele şi niciun triplet de drepte concurente. O mulţime $\mathcal{D}$ de drepte în poziţie generală împarte planul în regiuni, unele având arie finită; le vom numi pe acestea *regiunile finite ale lui* $\mathcal{D}$. Demonstraţi că, pentru orice n suficient de mare, în orice mulţime de n drepte în poziţie generală putem colora cel puţin $\sqrt{n}$ dintre drepte cu albastru, astfel încât niciuna dintre regiunile sale finite să nu aibă frontiera în întregime albastră.

Notă: Rezultate în care $\sqrt{n}$ este înlocuit cu $c\sqrt{n}$ pot primi puncte, funcţie de valoarea constantei c.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte