OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A XII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Să se calculeze: $\int \frac{1}{2+\sin x}dx$, $x \in [0, 2\pi]$.

O.L. Galați , 2014

2. Să se determine funcțiile derivabile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că funcția $f + 3g$ este o primitivă a funcției $2f - g$ și funcția $5f - 6g$ este o primitivă a funcției $10f + 2g$.

Petre Todor , Sebeș (G.M. 6-7-8 /2014)

3. Fie o funcție bijectivă $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ și $q \in \mathbb{R}$ cu $f(q) = 2$. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$” prin $a * b = f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b) - q), (\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$.
   a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție și simetricul lui $a \in \mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$” ;
   b) Pentru $f(x) = x^3$, rezolvați ecuația $x^2 * x = (6 - q)^3$.

4. Se consideră funcția $f_a: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_a(x, y) = \left(x + ay + \frac{a^2}{2}, y + a\right)$. Dacă $G = \{f_a | a \in \mathbb{R}\}$ arătați că :
   a) $(G, \circ)$ este grup, unde „$\circ$” este operația de compunere a funcțiilor;
   b) $(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Manual clasa a-XII-a , Editura Carminis

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 28.02.2015 –

CLASA A XII-A

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Detalii rezolvare	Barem asociat
f continuă pe $[0,2\pi] \Longrightarrow f$ admite primitive pe $[0,2\pi]$	1p
Construim o primitivă a lui f pe $[0,\pi) \cup (\pi,2\pi]$. Fie $:J \to \mathbb{R}$, unde $J \subset [0,\pi) \cup (\pi,2\pi]$ interval, G o primitivă a lui f. $t = tg\frac{x}{2} \Longrightarrow I = \int \frac{1}{t^2+t+1}\, dt = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + c$. Rezultă $G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$, $x \in J$	3p
Atunci $:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} G(x), x \in [0,\pi) \\ c_1, x = \pi \\ G(x) + c_2, x \in (\pi,2\pi] \end{cases}$ e o primitivă a lui f pe $[0,2\pi]$............	1p
F continuă în $x = \pi \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to\pi \\ x<\pi}} F(x) = \lim_{\substack{x\to\pi \\ x>\pi}} F(x) = F(\pi)$, deci $c_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, $c_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$	1p
Deci $F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}, x \in [0,\pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, x = \pi \\ \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, x \in (\pi,2\pi] \end{cases}$ și $\int \frac{1}{2+\sin x} dx = F(x) + C, x \in [0,2\pi]$	1p

Subiectul 2.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din ipoteză $\Rightarrow f' + 3g' = 2f - g$ și $5f' - 6g' = 10f + 2g$	1p
Se obține $f'(x) = 2f(x)$	1p
adică $(f(x) \cdot e^{-2x})' = 0, (\forall)x \in \mathbb{R}$	1p
$\Rightarrow f(x) = c_1 \cdot e^{2x}, c_1 \in \mathbb{R}$ constantă arbitrară	1p
Tot din ipoteză deducem că $-3g'(x) = g(x)$	1p
care se scrie $\left(g(x) \cdot e^{\frac{x}{3}}\right)' = 0, (\forall)x \in R$..	1p
$\Rightarrow g(x) = c_2 \cdot e^{-\frac{x}{3}}, c_2 \in R$ constantă arbitrară	1p

Subiectul 3.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $e \in \mathbb{R}$ element neutru $\Rightarrow f(f^{-1}(a)+f^{-1}(e)-q)=a, (\forall)a \in \mathbb{R}$	1p
Se compune cu f^{-1} și rezultă $f^{-1}(e)=q \Rightarrow e=f(q)=2$	1p
Fie a' simetricul lui $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f\left(f^{-1}(a)+f^{-1}(a')-q\right)=2=f(q)$ și din injectivitate Avem $f^{-1}(a)+f^{-1}(a')-q=q$, deci $a'=f\left(2q-f^{-1}(a)\right)$...	2p
b) $f(x)=x^3 \Rightarrow a*b=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}-q\right)^3$	1p
Ecuația se scrie $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=6$	1p
Mulțimea soluțiilor este $S=\{-27,8\}$	1p

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $(f_a \circ f_b)(x,y)=f_a\left(x+by+\frac{b^2}{2}, y+b\right)=f_{a+b}(x,y)$	1p
Asociativitatea	1p
Element neutru $f_0(x,y)=(x,y)$	1p
Simetricul unui element $f_a^{-1}(x,y)=f_{-a}(x,y)=\left(x-ay+\frac{a^2}{2}, y-a\right)$.............................	1p
b) Fie $\varphi: G \to \mathbb{R}, \varphi(f_a)=a$, $a \in \mathbb{R}$	1p
Atunci $\varphi(f_a \circ f_b)=\varphi(f_{a+b})=a+b=\varphi(f_a)+\varphi(f_b) \Rightarrow \varphi$ morfism.................................	1p
$\varphi(f_a)=\varphi(f_b) \Rightarrow a=b \Rightarrow x+ay+\frac{a^2}{2}=x+by+\frac{b^2}{2}$ și $y+a=y+b$. Rezultă că $f_a(x,y)=f_b(x,y) \Rightarrow \varphi$ injectivă$(\forall)a \in \mathbb{R}, (\exists)f_a \in G$ astfel încât $\varphi(f_a)=a$ $\Rightarrow \varphi$ surjectivă	1p