MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2015. február 28.

X. OSZTÁLY

1.) **a)** Számítsd ki

$A(a,b,c)=\log_{\sqrt{c}}\dfrac{c^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\log_{\frac{1}{c}}\dfrac{c}{a+b+2\sqrt{ab}}$, $a,b,c\in N^*$, $c>1$ értékét!

b) Oldd meg a $\left\{\log_{\sqrt{3}}\left[9\left(\sqrt{2}-1\right)\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left[3\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]\right\}^{x^2-3x}=\dfrac{1}{9}$, $x\in R$ egyenletet!

2.) Adottak a $z_1, z_2\in\mathbb{C}^*$ komplex számok úgy, hogy $|z_1-z_2|=|z_2|=|z_1|\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Számítsd ki a $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ és a $\dfrac{z_1}{z_2}$ értékét!

b) Határozd meg az $n\in\mathbb{N}$ értékét úgy, hogy $E_n\in\mathbb{Z}$, ahol $E_n=\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n+\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n}$!

3.) A természetes számok halmazán értelmezett *f* függvényre, bármely $n\geq 1$ esetén teljesül az $f(1)+2f(2)+3f(3)+....+nf(n)=n^2f(n)$ összefüggés. Ha $f(1)=2015$, határozd meg az *n* azon értékeit, amelyekre az $f(n)$ is természetes szám!

4.) **a)** Legyen *A* és *B* a $z^2-13z+72+30i=0$ egyenlet gyökeinek képe a komplex számsíkban. Számítsd ki az *AOB* háromszög területét, ha *O* a koordináta rendszer kezdőpontja!

b) Ábrázold az előbbi koordináta rendszerben a $|z|\leq 4$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát! Ez a megoldáshalmaz hány %-át fedi le az *AOB* háromszögnek? Egészre kerekített értéket adj meg!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

28 februarie 2015

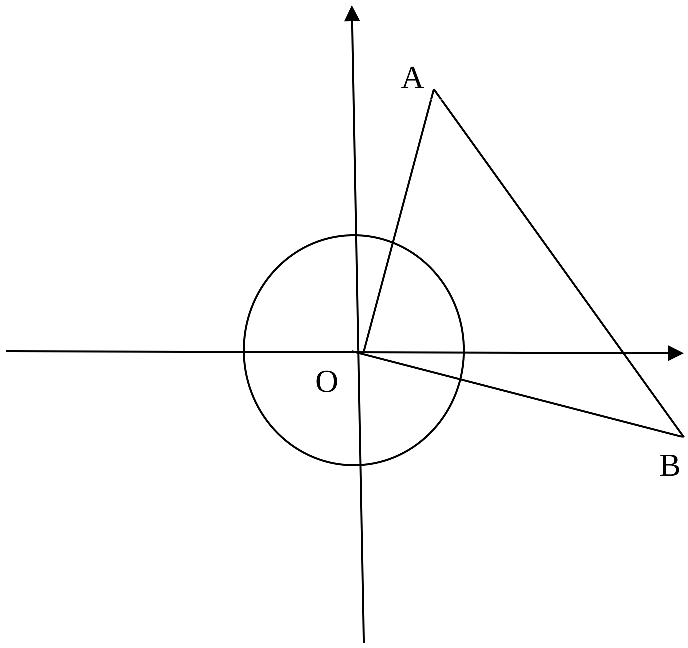
BAREM

CLASA A X-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$A(a,b,c)=\log_{\sqrt{c}}\dfrac{c^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\log_{\frac{1}{c}}\dfrac{c}{a+b+2\sqrt{ab}}=\dfrac{\log_c\frac{c^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\log_c\frac{c}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}}{-1}=$	**2p**
	$=\log_c\dfrac{c^4}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}-\log_c\dfrac{c}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\log_c c^3=3$	**2p**
b)	$\log_{\sqrt{3}}\left[9\left(\sqrt{2}-1\right)\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left[3\left(3-2\sqrt{2}\right)\right]=\log_{\sqrt{3}}\dfrac{9}{1+\sqrt{2}}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3}{3+2\sqrt{2}}=A(1,2,3)=3$	**2p**
	Deci avem ecuaţia $3^{x^2-3x}=\dfrac{1}{9}$ echivalentă cu ecuaţia de gradul doi $x^2-3x+2=0$	**2p**
	Mulţimea soluţiilor este $S=\{1,2\}$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}=\sqrt{2}$, $\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}-1\right\rvert=1$	**2p**
	Rezultă că $\dfrac{z_1}{z_2}$ este afixul intersecţiei cercului cu centrul în origine şi raza $\sqrt{2}$ şi a cercului cu centrul în punctul de coordonate (1, 0) şi raza 1. Cele două cercuri au două puncte comune $A(1,1)$ şi $B(1,-1)$ de unde rezultă că $\dfrac{z_1}{z_2}\in\{1+i,1-i\}$.	**3p**
b)	$E_n=(1+i)^n+(1-i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)+\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}-i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$	**2p**
	$E_n=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\dfrac{n\pi}{4}\in Z, \forall n\in N$	**2p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	Scriem relaţia dată pentru (n+1) şi scădem cele două relaţii obţinând $(n+1)f(n+1)=(n+1)^2 f(n+1)-n^2 f(n)\Leftrightarrow n^2 f(n)=n(n+1)f(n+1)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{n}{n+1}, \forall n\geq 1$	**4p**
	Scriem aceste relaţii pentru $n=1,2,3,...$ şi le înmulţim $\Rightarrow f(n)=\dfrac{1}{n}f(1)\Rightarrow f(n)=\dfrac{2015}{n}$	**3p**
	Numerele căutate sunt divizorii lui 2015. Deoarece $2015=1\cdot 5\cdot 13\cdot 31$ $\Rightarrow n\in\{1,5,13,31,65,155,403,2015\}$	**2p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
a)	$\Delta = -119 - 120i = (5-12i)^2$, $z_1 = 9-6i$, $z_2 = 4+6i$	**2p**
	$AB = \lvert z_1 - z_2 \rvert = 13$, $AO = \lvert z_1 \rvert = 3\sqrt{13}$, $BO = \lvert z_2 \rvert = 2\sqrt{13}$.	**2p**
	Rezultă că $OA^2 + OB^2 = AB^2$ deci triunghiul AOB este dreptunghic cu aria $A_{AOB} = \dfrac{AO \cdot BO}{2} = 39$	**2p**
		**1p**
b)	Deoarece unghiul AOB este unghi drept, rezultă că sectorul circular care acoperă triunghiul este un sfert din discul cu aria 4π, ceea ce reprezintă 32,2..% adică rotunjit la întreg, 32%- din aria triunghiului AOB .	**2p**