OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VI-A

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Demonstrați că numerele naturale, care împărțite în $\mathbb{N}$ la 102 dau restul 78, sunt divizibile cu 3.

Soluție:

Fie $n \in \mathbb{N},\ n:102 = c$ rest 78.
Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem $n = 102c + 78 = 3 \cdot (34c + 26)$, de unde numărul n este divizibil cu 3.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Notează cu $n \in \mathbb{N}$, $n:102 = c$ rest 78	1p
Aplică teorema împărțirii cu rest și obține $n = 102c + 78$	1p
Deduce că $n = 3 \cdot (34c + 26)$	4p
Precizează că numerele n sunt divizibile cu 3 ………………………………………………...	1p

Subiectul 2. Fie unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ astfel încât raportul măsurilor să fie $\frac{1}{4}$. Fie $[OD$ semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\sphericalangle BOC$. În interiorul unghiului $\sphericalangle COD$ șe consideră punctele M și N astfel încât $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle MON) > 45^0$.

a) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.
b) Demonstrați că punctele B, O, M sunt coliniare.

Soluție:

a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$.
Avem $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^0$ de unde se deduce că $m(\sphericalangle BOC) = 180^0 - x$. Cum

$$\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{180^0 - x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = 180^0 - x \Longrightarrow 5x = 180^0 \Leftrightarrow x = 36^0$$

obținem $m(\sphericalangle AOB) = 36^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 180^0 - 36^0 = 144^0$.
Fie $[OX$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$. Avem $m(\sphericalangle BOX) = m(\sphericalangle XOC) = 144^0 : 2 = 72^0$. Cum $[OX$ și $[OD$ sunt semidrepte opuse avem $m(\sphericalangle XOD) = 180^0$ de unde avem

$$m(\sphericalangle COD) = 180^0 - m(\sphericalangle XOC) = 180^0 - 72^0 = 108^0.$$

b) Se discută pe cazuri:

Cazul $[\boldsymbol{ON} \subset \boldsymbol{Int}(\sphericalangle \boldsymbol{COM})$

Notăm $m(\sphericalangle MON) = a \Rightarrow m(\sphericalangle DOM) = m(\sphericalangle CON) = 2a$

$$m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle DON) + m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOC) \Longrightarrow 5a = 108^0 \Longrightarrow a = 21^0\,36'$$

Cum $m(\sphericalangle COD) = 2a = 43^0\,12' < 45^0$, acest caz nu convine.

Cazul $[\boldsymbol{OM} \subset \boldsymbol{Int}(\sphericalangle \boldsymbol{CON})$

Notăm $m(\sphericalangle MON) = a$ Avem $m(\sphericalangle DOM) = m(\sphericalangle CON) = 2a \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 2a - a = a$.

$$m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle DOM) + m(\sphericalangle MOC) \Leftrightarrow 3a = 108^0 \Leftrightarrow a = 36^0$$

Deci $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2a = 72^0 > 45^0$, convine.

$m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COM) = 144^0 + 36^0 = 180^0 \Longrightarrow B, O, M$ coliniare.

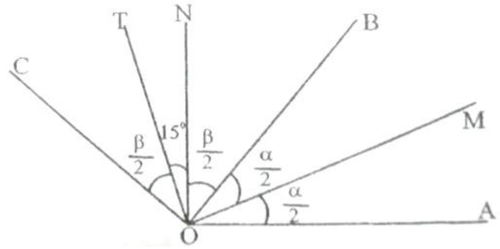
Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei..	1p
a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = x$ și deduce că $m(\sphericalangle BOC) = 180^0 - x$	1p
Determină $x = 36^0$ de unde obține $m(\sphericalangle AOB) = 36^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 144^0$	1p
b) Studiază **cazul** $[\boldsymbol{ON} \subset \boldsymbol{Int}(\sphericalangle \boldsymbol{COM})$ Notează $m(\sphericalangle MOM) = a \Rightarrow m(\sphericalangle DOM) = m(\sphericalangle CON) = 2a$ Deduce că $a = 21^0\ 36'$ și cum $m(\sphericalangle COD) = 2a = 43^0\ 12' < 45^0$, acest caz nu convine.	2p
Studiază **cazul** $[\boldsymbol{OM} \subset \boldsymbol{Int}(\sphericalangle \boldsymbol{CON})$ Notează $m(\sphericalangle MOM) = a \Longrightarrow m(\sphericalangle CON) = 2a \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 2a - a = a.$ Deduce că $a = 36^0$ și $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2a = 72^0 > 45^0$, acest caz convine. Arată că $m(\sphericalangle BOM) = 180^0 \Longrightarrow B, O, M$ coliniare.	2p

Subiectul 3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât bisectoarele lor $[OM$ și $[ON$ să formeze un unghi de 75^0.

a) Să se determine $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle BOC)$ știind că $3 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC)$.

b) Dacă semidreapta $[OT$ formează unghi drept cu semidreapta $[OM$ astfel încât punctele M și T sunt de aceeași parte cu punctul B față de punctul A. Calculați: $m(\sphericalangle TON)$, $m(\sphericalangle BON)$ și $m(\sphericalangle BOT)$ și $m(\sphericalangle COT)$.

Soluție:



a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = \alpha$ și $m(\sphericalangle BOC) = \beta$. Avem:

$[OM$ bisectoarea $\sphericalangle AOB \Longrightarrow m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOB) = \dfrac{\alpha}{2}$;

$[ON$ bisectoarea$\sphericalangle BOC \Longrightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle NOC) = \dfrac{\beta}{2}$.

Cum $m(\sphericalangle MON) = 75^0$ avem că $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = 75^0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 150^0 \Rightarrow \alpha = 150^0 - \beta$, (1).

Dar $3 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC) \Longrightarrow 3\alpha = 2\beta$, (2).

Din (1) și (2) avem $3(150^0 - \beta) = 2\beta \Leftrightarrow 450^0 = 5\beta \Leftrightarrow \beta = 90^0$ și $\alpha = 150^0 - 90^0 = 60^0$.

Avem $m(\sphericalangle AOB) = 60^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 90^0$.

b) Avem $m(\sphericalangle MOT) = 90^0$ de unde avem: $m(\sphericalangle TON) = 90^0 - [m(\sphericalangle NOB) + m(\sphericalangle MOB)] = 15^0$;

$m(\sphericalangle \mathrm{BON}) = \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$; $m(\sphericalangle BOT) = m(\sphericalangle BON) + m(\sphericalangle TON) = 45^0 + 15^0 = 60^0$;

$m(\sphericalangle COT) = m(\sphericalangle CON) - m(\sphericalangle TON) = 45^0 - 15^0 = 30^0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Figura corespunzătoare problemei..	1p
a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = \alpha$ și $m(\sphericalangle BOC) = \beta$ și deduce că $\alpha + \beta = 150^0$	1p
Determină $m(\sphericalangle AOB) = 60^0$ și $m(\sphericalangle BOC) = 90^0$	1p
b) Precizează că $m(\sphericalangle MOT) = 90^0$ și calculează $m(\sphericalangle TON) = 15^0$	1p
$m(\sphericalangle BON) = 45^0$	1p
$m(\sphericalangle BOT) = 60^0$	1p
$m(\sphericalangle COT) = 30^0$	1p

Subiectul 4. Determinați numerele naturale n știind că fracția $\frac{3n+1}{2n-7}$ este reductibilă.

Soluție:

Dacă fracția este reductibilă atunci există $d \neq 1$ astfel încât $d|3n+1$ și $d|2n-7$. De aici avem $d|2(3n+1)-3(2n-7)$, adică $d|23$, prin urmare $d=23$. Acum $23|3n+1$ și $23|2n-7$ deducem că $23|n+8$, adică $n+8=23k$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$. Se verifică pentru $n=23k-8$, $k \in \mathbb{N}^*$, fracția este reductibilă.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Precizează că există $d \neq 1$ astfel încât $d\|3n+1$ și $d\|2n-7$ …………………………………..	1p
Deduce că $d\|2(3n+1)-3(2n-7) \Rightarrow d\|23 \Rightarrow d=23$ ………………………………………..	2p
Din $23\|3n+1$ și $23\|2n-7 \Rightarrow 23\|n+8$ adică $n+8=23k$, pentru $k \in \mathbb{N}^*$ …………………….	2p
Precizează că fracția este ireductibilă pentru $n=23k-8$, $k \in \mathbb{N}^*$ …………………………..	2p