OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21februarie 2016

Clasa a VII-a

1.a) Determinați $x \in \mathbb{Q}^*$ pentru care $x + \frac{1}{x} + 2 \in \mathbb{Z}$.

Pentru x determinat la punctul a), să se arate că:

b) $\left(x^{2016} + \frac{1}{x^{2016}} + 2014\right) \vdots 2016$;

c) $\left(x^{n} + \frac{1}{x^{n}} + 2014\right) \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

2.a) Demonstrați că $\left[1+\frac{1}{k(k+1)}\right]^2 = 1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

b) Notăm cu S_n suma : $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$.

Arătați că $S_{10} = \frac{120}{11}$.

c) Câți termeni trebuie să aibă S_n, astfel încât $[S_n] = 2016$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

3. Fie *ABCD* un dreptunghi, $AB > BC$, în care bisectoarea unghiului $\measuredangle ACB$ intersectează dreapta *AD* în punctul *E*, iar perpendiculara în *A* pe *AC* intersectează dreapta *BC* în punctul *F*. Fie $CE \cap AB = \{M\}$ și $CE \cap AF = \{N\}$. Știind că triunghiul *AMN* este echilateral, demonstrați că $[AC] \equiv [EF]$.

4.Fie dreptunghiul $ABCD$. Perpendiculara AM peBD $(M \in BD)$ intersectează BC și DC, respectiv în E și F. Arătați că $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Timp de lucru: 3 ore*

Soluţii clasa aVII-a:

1. a)Deoarece $x + \frac{1}{x} + 2 \in \mathbb{Z}$, iar $2 \in \mathbb{Z}$, deducem că $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Fie $x \in \mathbb{Q}^* \Longrightarrow$

$$x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1.$$

Evaluăm $x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{m \cdot n} \in \mathbb{Z}$

$$\Longrightarrow \left.\begin{matrix} m \cdot n / (m^2 + n^2) \\ \\ (m, n) = 1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} m/(m^2 + n^2)\ (1) \\ \text{și} \\ n/(m^2 + n^2)\ (2) \end{cases}.$$

Din $(1), (2)$ obținem m/n și $n/m \Longrightarrow m = nsaum = -n$.Deci $x = 1$ sau$x = -1$.

b) $\left(x^{2016} + \frac{1}{x^{2016}} + 2014\right)$=$(\pm 1)^{2016} + (\pm 1)^{2016} + 2014 =$

$= 1 + 1 + 2014 = 2016 \vdots 2016$;

c) Cazul I: $x = -1$;

$$x^n + \frac{1}{x^n} + 2014 = \begin{cases} 2016, & n = \text{par} \\ \\ 2012, & n = \text{impar} \end{cases};$$

Cazul II: $x = 1$;

$x^n + \frac{1}{x^n} + 2014 = 2016.$

În ambele cazuri rezultatele sunt divizibile cu 4. În concluzie:

$\left(x^n + \frac{1}{x^n} + 2014\right) \vdots 4, \forall n \in \mathbb{N}.$

2. a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\left[1 + \frac{1}{k(k+1)}\right]^2 = 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{k(k+1)} + \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow$$

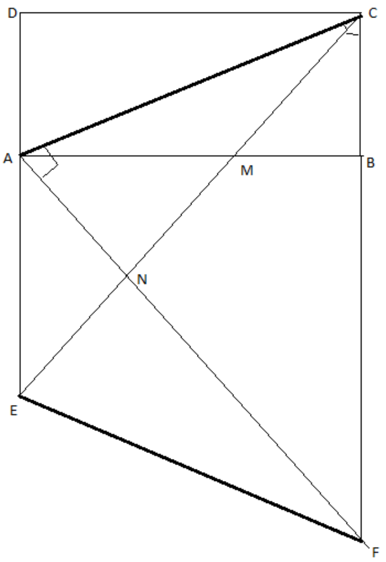
$$\frac{2k(k+1)}{k^2(k+1)^2} + \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)^2} + \frac{k^2}{k^2(k+1)^2} \Leftrightarrow \frac{2k(k+1)+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k^2 + 2k + 1}{k^2(k+1)^2}.$$

b) Din a) obținem: $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, iar S_{10} este de forma:$S_{10} = \left(1 + 1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = 11 - \frac{1}{11} = \frac{120}{11}$

c) $S_n = \left(1 + 1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = (n+1) - \frac{1}{n+1}$. Deoarece $S_n = n + 1 - \frac{1}{n+1} = n + \frac{n}{n+1} > n$. Dar $\frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow S_n < n + 1 \Rightarrow$ $n < S_n < n + 1$, deci $[S_n] = 2016$ numai dacă $n = 2016$. Numărul de termeni pentru care$[S_n] = 2016$ este: $n = 2016$.

3.



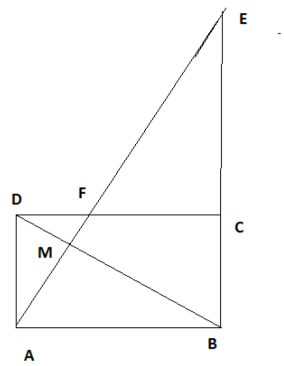


Figura problema 3 Figura problema 4

Deoarece $(CE$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle ACB$ rezultă că $\measuredangle ACE \equiv \measuredangle BCE$.
Din faptul că $AD//BC$ iar CE este secantă rezultă că $\measuredangle BCE \equiv \measuredangle AEC$.
Din cele două relații avem că $\measuredangle ACE \equiv \measuredangle AEC$ de unde $[AC] \equiv [AE]$.(1)
Triunghiul AMN fiind echilateral rezultă că $m(\measuredangle AMN) = 60^\circ$ de unde avem că $m(\measuredangle BMC) = 60^\circ$ deci $m(\measuredangle ACE) = m(\measuredangle FCE) = 30^\circ$. De asemenea, $m(\measuredangle MAN) = 60^\circ$ deci $m(\measuredangle EAF) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Prin urmare $m(\measuredangle ACE) = m(\measuredangle EAF) = 30^\circ$.(2)
Din congruența triunghiurilor dreptunghice BAF și DCE
($[AB] \equiv [CD], \measuredangle BAF \equiv \measuredangle DCE \left(= 60^\circ\right)$) rezultă $[AF] \equiv [CE]$.(3)
Din relațiile (1),(2) și (3) obținem că triunghiurile CAE și AEF sunt congruente (L.U.L.) de unde $[AE] \equiv [EF]$ și folosind relația (1) obținem $[AC] \equiv [EF]$.

4. În $\Delta AEB, FC \parallel AB \overset{TFA}{\Rightarrow} \Delta ABE \sim \Delta FCE \Longrightarrow \frac{FC}{AB} = \frac{CE}{BE} = \frac{FE}{AE}$, iar din $\frac{FC}{AB} = \frac{FE}{AE} \Longrightarrow$
$\frac{AB-FC}{AB} = \frac{AE-FE}{AE} \Longrightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{AF}{AE}$ (1).
$\Delta ABM \sim \Delta FDM \Longrightarrow \frac{FM}{AM} = \frac{DM}{BM} = \frac{FD}{AB}$ (2). Din (1) și (2) $\Longrightarrow \frac{FM}{AM} = \frac{AF}{AE} = \frac{AF-AM}{AM} \Longrightarrow$
$$\Longrightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AM} - 1 \Big| \cdot \frac{1}{AF} \Longrightarrow \frac{AF}{AE} \cdot \frac{1}{AF} = \frac{AF}{AM} \cdot \frac{1}{AF} - \frac{1}{AF} \Longrightarrow \frac{1}{AE} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AF} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}.$$