

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a XII-a M₁

Problema 1

Să se calculeze : $\int \frac{3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2015}{(x^4 + x^3 + x^2 + 2015)^2} dx, x \in \mathbb{R}.$

Problema 2

Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx.$

Problema 3

Pe mulțimea numerelor reale \mathbb{R} se definește legea de compoziție "*" având următoarele proprietăți :

$$1) \left(\frac{a+1}{3}\right) * \left(\frac{a}{2}\right) = 1, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$2) (a * b) \cdot c = (a \cdot c) * (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Calculați $10 * 14.$

Problema 4

Pe mulțimea numerelor reale nenule \mathbb{R}^* se definește legea de compoziție "*" prin

$$a * b = \begin{cases} \frac{a}{b}, & \text{daca } a < 0 \\ ab, & \text{daca } a > 0 \end{cases}, \forall a, b \in \mathbb{R}^*.$$

a) Demonstrați că $(\mathbb{R}^*, *)$ este grup necomutativ.

b) Rezolvați ecuația $a * b * a = b, (a, b \in \mathbb{R}^*).$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a XII-a M₁
Soluții și bareme

Problema 1

Căutăm $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left(\frac{ax+b}{x^4+x^3+x^2+2015}\right)' = \frac{3x^4+2x^3+x^2-2015}{(x^4+x^3+x^2+2015)^2}$ 2p

$\Leftrightarrow \frac{-3ax^4 + (-2a-4b)x^3 + (-a-3b)x^2 + (-2b)x + 2015a}{(x^4+x^3+x^2+2015)^2} = \frac{3x^4+2x^3+x^2-2015}{(x^4+x^3+x^2+2015)^2}$ 2p

Identificând coeficienții obținem $a = -1, b = 0 \Rightarrow \left(\frac{-x}{x^4+x^3+x^2+2015}\right)' = \frac{3x^4+2x^3+x^2-2015}{(x^4+x^3+x^2+2015)^2}$ 1p

$\Rightarrow \int \frac{3x^4+2x^3+x^2-2015}{(x^4+x^3+x^2+2015)^2} dx = \int \left(\frac{-x}{x^4+x^3+x^2+2015}\right)' dx = \frac{-x}{x^4+x^3+x^2+2015} + C$ 2p

Problema 2

Făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - t$ obținem egalitatea integralelor I și J

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + 1} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t + \cos t}{\sin t + \cos t + 1} dt = J$ 3p

$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x + \cos x}{\sin x + \cos x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$ 4p

Problema 3

$10 * 14 = (5 \cdot 2) * (7 \cdot 2) = (5 * 7) \cdot 2$ 3p

În propr 1) pt $a = 14 \Rightarrow \frac{15}{3} * \frac{14}{2} = 5 * 7 = 1 \Rightarrow 10 * 14 = 1 \cdot 2 = 2$ 4p

Problema 4

a) Legea este bine definită, evident. Asociativitate:

$$(a * b) * c = \begin{cases} (ab) * c, & \text{daca } a, b \in (0, \infty) \\ (ab) * c, & \text{daca } a \in (0, \infty) \text{ si } b \in (-\infty, 0) \\ \frac{a}{b} * c, & \text{daca } a \in (-\infty, 0) \text{ si } b \in (0, \infty) \\ \frac{a}{b} * c, & \text{daca } a, b \in (-\infty, 0) \end{cases} = \begin{cases} abc, & \text{daca } a, b \in (0, \infty) \\ \frac{ab}{c}, & \text{daca } a \in (0, \infty) \text{ si } b \in (-\infty, 0) \\ \frac{a}{bc}, & \text{daca } a \in (-\infty, 0) \text{ si } b \in (0, \infty) \\ \frac{ac}{b}, & \text{daca } a, b \in (-\infty, 0) \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$a * (b * c) = \begin{cases} a * (bc), & \text{daca } a, b \in (0, \infty) \\ a * \left(\frac{b}{c}\right), & \text{daca } a \in (0, \infty) \text{ si } b \in (-\infty, 0) \\ \frac{a}{b * c}, & \text{daca } a \in (-\infty, 0) \text{ si } b \in (0, \infty) \\ \frac{a}{b * c}, & \text{daca } a, b \in (-\infty, 0) \end{cases} = \begin{cases} abc, & \text{daca } a, b \in (0, \infty) \\ \frac{ab}{c}, & \text{daca } a \in (0, \infty) \text{ si } b \in (-\infty, 0) \\ \frac{a}{bc}, & \text{daca } a \in (-\infty, 0) \text{ si } b \in (0, \infty) \\ \frac{ac}{b}, & \text{daca } a, b \in (-\infty, 0) \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Deci legea este asociativă.(1)

$$2 * (-5) = -10 \text{ și } (-5) * 2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{legea nu e comutativă(2)} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Element neutru } e = 1 \text{ pt că } 1 * a = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{R}^* \text{ și } a * 1 = \begin{cases} a \cdot 1, & \text{pt } a > 0 \\ \frac{a}{1}, & \text{pt } a < 0 \end{cases} = a, \forall a \in \mathbb{R}^* \text{ (3)} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\text{Notăm } a' \text{ simetricul lui } a, a' = \begin{cases} a, & \text{pt } a < 0 \\ \frac{1}{a}, & \text{pt } a > 0 \end{cases} \text{ (4)} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Din (1)-(4) $\Rightarrow (\mathbb{R}^*, *)$ grup necomutativ.

$$\mathbf{b) } a * x * a = b \Leftrightarrow x = a' * b * a' = \begin{cases} b, & \text{pt } a > 0, b < 0 \\ \frac{b}{a^2}, & \text{pt } a > 0, b > 0 \\ \frac{a^2}{b}, & \text{pt } a < 0, b < 0 \\ \frac{1}{b}, & \text{pt } a < 0, b > 0 \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$