Olimpiada de matematică – clasa a XII-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SOLUȚII

1. Calculați integrala nedefinită $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

Rezolvare

Fie $I=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ și $K=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

Adunând și apoi scăzând cele două se obține $I+K=\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int dx=x+C$ și

$$I-K=\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{\left(\sin x+\cos x\right)'}{\sin x+\cos x}dx=\ln\left|\sin x+\cos x\right|+C.$$

Deci $I=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left|\sin x+\cos x\right|\right)+C$.

2. Determinați funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dacă

$$xf'(x)+2f(x)+xF(x)=0\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f.

Rezolvare

$$\left(xF\left(x\right)\right)''=\left(F\left(x\right)+xf\left(x\right)\right)'=f\left(x\right)+f\left(x\right)+xf'\left(x\right)=2f\left(x\right)+xf'\left(x\right).$$

Deci $\left(xF\left(x\right)\right)''+xF\left(x\right)=0$

Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=xF\left(x\right)$

$$g''\left(x\right)+g\left(x\right)=0\Rightarrow 2g''\left(x\right)g'\left(x\right)+2g\left(x\right)g'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\left(g'\left(x\right)\right)^2+g^2\left(x\right)\right]'=0\Rightarrow\left(g'\left(x\right)\right)^2+g^2\left(x\right)=c^2$$

unde $c\in\mathbb{R}$ este constantă. Deci rezultă $\alpha\left(x\right)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ astfel încât $g\left(x\right)=c\sin\left(\alpha\left(x\right)\right)$ și

$g'\left(x\right)=c\cos\left(\alpha\left(x\right)\right)$, Dacă $c\neq 0$, atunc $\alpha\left(x\right)=\arcsin\frac{g\left(x\right)}{c}$, deci este derivabilă. Pe de altă parte

$g'(x) = c\cos(\alpha(x))\alpha'(x)$, deci $\alpha(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Astfel $xF(x) = c\sin(x+a)$, deci pentru $x \neq 0$ $f(x) = \left(\dfrac{c\sin(x+a)}{x}\right)' = \dfrac{xc\cos(x+a) - c\sin(x+a)}{x^2}$

Din egalitatea inițială $f(0) = 0$ și f este continuă, iar pentru $c \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \pm\infty$, deci $c = 0$

Deci $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

3. **a)** Arătați că mulțimea de funcții

$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$ cu compunerea funcțiilor formează un monoid.

b) Determinați elementele continue ale mulțimii F .

Rezolvare

a) Compunerea funcțiilor este asociativă. Funcția identică verifică egalitatea $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$, deci aparține mulțimii F . Trebuie să demonstrăm stabilitatea.

Dacă $f, g \in F$, atunci $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ și $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$(f \circ g)(x+y) = f(g(x+y)) = f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + f(g(y)) = (f \circ g)(x) + (f \circ g)(y)$

Deci $f \circ g \in F$

b) Fie $f \in F$ continuă.

Pentru $x = y = 0$ avem $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Pentru $y = -x$ avem $f(0) = f(x) + f(-x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Deci funcția este impară.

Se demonstrează prin inducție că $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Deci $f(n) = nf(1)$ și $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Fie $f(1) = a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Z}$

$$a = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Pentru $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^* \Rightarrow f\left(\dfrac{m}{n}\right) = mf\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{m}{n}a \Rightarrow f\left(-\dfrac{m}{n}\right) = -f\left(\dfrac{m}{n}\right) = -\dfrac{m}{n}a$

Deci $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$

Dacă $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci există un șir convergent de numere rationale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu limita x_0 , iar funcția fiind continua, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, pe de altă parte

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(ax_n) = ax_0$, deci $f(x_0) = ax_0$.

Deci $f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}$, adică funcțiile continue din mulțimea F sunt
$\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \middle| f(x)=ax, \forall x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}\right\}$.

4. a) Arătați că mulțimea $G=(2013,+\infty)$ cu operația $x\circ y=xy-2013x-2013y+2013\cdot 2014$, $\forall x,y\in G$, este grup izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

b) Dacă H este un subgrup al grupului G și $G\cap\mathbb{N}\subset H$, arătați că $G\cap\mathbb{Q}\subset H$.

Rezolvare

a) $x\circ y=xy-2013x-2013y+2013\cdot 2014=(x-2013)(y-2013)+2013$

Funcția $f:(2013,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x-2013$ este bijectivă și $f(x\circ y)=f(x)f(y)$

Deci este un izomorfism între structura $(G,\circ)$ și grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$, deci $(G,\circ)$ este grup izomorf gu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

b) Dacă H este un subgrup al grupului G, atunci $f(H)$ este subgrup al lui $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$. Din $G\cap\mathbb{N}\subset H$ rezultă $f(G\cap\mathbb{N})\subset f(H)$. $f(G\cap\mathbb{N})=\mathbb{N}^*$, deci $\forall n\in\mathbb{N}^*$ este în subgrupul $f(H)$, rezultă că $\dfrac{1}{n}\in f(H)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Din $m\in f(H), \forall m\in\mathbb{N}^*$ și $\dfrac{1}{n}\in f(H)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că $\dfrac{m}{n}\in f(H)$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$, adică $\mathbb{Q}_+^*\subset f(\mathbb{N})$, deci preimaginea lui $\mathbb{Q}_+^*$ este în H, adică $G\cap\mathbb{Q}\subset H$