|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Description: C:\Users\raluca\Desktop\ANTET 2.jpg | **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA** | logo | **MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE** |

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa locală**

**Județul Alba, 13 februarie 2015**

**Clasa a XII-a**

**Problema 1.**

Pe mulţimea definim legea de compoziţie:

.

a) Să se arate că este grup abelian.

b) Să se arate că funcţia , este un izomorfism de grupuri de la grupul la grupul .

c) Să se calculeze ; .

d) Să se determine părţile stabile finite ale lui în raport cu operaţia „”.

**Problema 2.**

Fie un grup de ordinul şi două endomorfisme ale sale, cu proprietatea că este injectivă şi , pentru orice .

a) Arătaţi că .

b) Arătaţi că este ciclic.

**Problema 3.**

Fie două funcţii derivabile care au proprietatea că funcţia este o primitivă a funcţiei , iar funcţia este o primitivă a funcţiei .

a) Arătaţi că .

b) Determinaţi funcţiile şi .

**Problema 4.**

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Description: C:\Users\raluca\Desktop\ANTET 2.jpg | **INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ALBA** | logo | **MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE** |

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XII-a**

**Problema 1.**

Pe mulţimea definim legea de compoziţie:

.

a) Să se arate că este grup abelian.

b) Să se arate că funcţia , este un izomorfism de grupuri de la grupul la grupul .

c) Să se calculeze ; .

d) Să se determine părţile stabile finite ale lui în raport cu operaţia „”.

**Soluţie şi barem:**

a) • Asociativitate, .........................................................**1p**

 • Elementul neutru ...........................................................................................**1p**

• Simetricul elementului , ..............................................................**1p**

b) • bijectivă .......................................................................................................................**1p**

 • .............................................................................**1p**

c) • Dacă , atunci , de unde obţinem

 ...............................................................................................................**1p**

d) • Dacă este parte stabilă şi , atunci şi cum este finită,

 există astfel încât ; de aici , de unde se

 obţine . Convine doar , de unde .

 În concluzie, singura parte stabilă finită este ....................................................**1p**

**Problema 2.**

Fie un grup de ordinul şi două endomorfisme ale sale, cu proprietatea că este injectivă şi , pentru orice .

a) Arătaţi că .

b) Arătaţi că este ciclic.

**Soluţie şi barem:**

a) • .......................................**2p**

 • injectivă ...................................................................**1p**

b) • , de unde ................................................**1p**

• , pentru orice ..........**1p**

• , deci există având ordinele respectiv , deci

 ..............................................**1p**

 • ; analog se obţine ,

 de unde obţinem , deci este ciclic ......................... **1p**

**Problema 3.**

Fie două funcţii derivabile care au proprietatea că funcţia este o primitivă a funcţiei , iar funcţia este o primitivă a funcţiei .

a) Arătaţi că .

b) Determinaţi funcţiile şi .

**Soluţie şi barem:**

a) • ......................................................**2p**

 • .....................................................................................**1p**

b) • ..................................................................................**1p**

 • ....................................................................................**2p**

 • În concluzie funcţiile căutate sunt şi , unde ...**1p**

**Problema 4.**

**Soluţie şi barem:**

a) • continuă mărginită pe .........**1p**