CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a XI–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Fie mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ lna & 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ a \in (0; +\infty) \right\}$.

a) *Demonstrați că produsul oricăror două matrice din mulțimea* $\mathcal{M}$ *este o matrice din mulțimea* $\mathcal{M}$.

b) *Determinați perechile de numere naturale nenule* (m, n), *cu* $m > n$, *astfel încât pentru matricele* $M(m)$ *și* $M(n)$ *din mulțimea* $\mathcal{M}$, *să aibă loc relația:*

$$det\big(M(m) \cdot M(n)\big) - det\big(M(m)\big) - det\big(M(n)\big) = 2024.$$

c) *Determinați matricele* $M(a) \in \mathcal{M}$, *cu* $a \in \mathbb{N}^*$, *pentru care există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $M^n(a) = M(4096)$.

SOLUȚIE:

a) Fie $M(x), M(y) \in \mathcal{M} \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ lnx & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ lny & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x \cdot y & 0 \\ lnx + lny & 0 & 1 \end{pmatrix} =$..........1p

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x \cdot y & 0 \\ ln(x \cdot y) & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(x \cdot y) \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = M(x \cdot y)$; $x, y \in (0;\ +\infty) \Rightarrow x \cdot y \in (0;\ +\infty)$ $\Rightarrow M(x \cdot y) \in \mathcal{M} \Rightarrow M(x) \cdot M(y) \in \mathcal{M}$.....1p

b) $det\big(M(x)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ lnx & 0 & 1 \end{vmatrix} = x$

$M(m) \cdot M(n) = M(m \cdot n) \Rightarrow det\big(M(m) \cdot M(n)\big) - det\big(M(m)\big) - det\big(M(n)\big) = 2024 \Leftrightarrow m \cdot n - m - n =$ 2024...1p

$m \cdot n - m - n + 1 = 2025 \Leftrightarrow (\mathrm{m} - 1)(\mathrm{n} - 1) = 2025$ și $\mathrm{m} > \mathrm{n} \Rightarrow$

$(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \in \{(2026,2), (676,4), (406,6), (226,10), (136,16), (82,26), (76,28), \}$...1p

c) Se demonstrează prin inducție $M^n(a) = M(a^n), (\forall) M(a) \in \mathcal{M}$..1p

$\Rightarrow M(a^n) = M(4096) \Rightarrow a^n = 4096$.

$4096 = 2^{12} \Rightarrow$ 4096 se poate scrie ca putere de număr natural nenul doar ca $4096^1, 64^2, 16^3, 8^4, 4^6, 2^{12}$............1p

Astfel, $M^1(4096) = M^2(64) = M^3(16) = M^4(8) = M^6(4) = M^{12}(2) = M(4096) \Rightarrow$ matricele sunt:

$M(2), M(4), M(8), M(16), M(64), M(4096)$..1p

Subiectul 2.

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} / x \in R \right\}$

a) *Demonstrați că orice matrice din mulțimea M este inversabilă și că inversa aparține mulțimii M;*

b) *Demonstrați că soluția ecuației* $A(a) \cdot X = A(b)$, *unde* $X \epsilon M_3(R)$ *și* $A(a), A(b) \in M$, *este element al mulțimii M;*

c) *Calculați* $[A(2)]^{2024}$.

SOLUȚIE:

a) arată că $\det A(x) = 1 \neq 0, (\forall) x \in R \rightarrow A(x)$ *inversabilă* 1p

calculează $A^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & -\frac{x^2}{2} & 1 \end{pmatrix} = A(-x) \in M$ 1p

b) $A(a)$ *inversabilă*, $A^{-1}(a) = A(-a),\ X = A(-a) \cdot A(b)$ 1p

$X = A(-a + b) \in M$ 1p

c) *deduce* $A^n(x) = A(nx), (\forall) x \in R$ *și* $(\forall) n \geq 1$ 1p

demonstrază prin inducție că $A^n(x) = A(nx), (\forall) x \in R$ *și* $(\forall) n \geq 1$....................1p

calculează $A^{2024}(2) = A(4048)$ 1p

Subiectul 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3, & x \leq -1 \\ ax^2 + ax - 1, & x > -1 \end{cases}$, *unde* $a \in \mathbb{R}^*$.

a) *Demonstrați că funcția* f *este continuă, oricare ar fi* $a \in \mathbb{R}^*$.

b) *Determinați numărul real nenul* a, *astfel încât funcția* f *să fie derivabilă în* $x_0 = -1$.

c) *Demonstrați că funcția* f *are o singură rădăcină în intervalul* $I = [0; 2]$, *oricare ar fi* $a > \frac{1}{6}$.

SOLUȚIE:

a) i) f continuă pe intervalul $(-\infty; -1)$ deoarece este funcție de gradul doi, elementară;

ii) f continuă pe intervalul $(-1; +\infty)$ deoarece este funcție de gradul doi, elementară;....................1p

iii) în $x_0 = -1$

$$\left. \begin{array}{l} l_s = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x^2 + 5x + 3) = -1 \\ l_d = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (ax^2 + ax - 1) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ continuă în } x_0 = -1$$

Din i), ii) și iii)⇒f continuă pe ℝ....................1p

b) f derivabilă în $x_0 = -1 \Leftrightarrow f'_s(-1) = f'_d(-1)$

$f'_s(-1) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + 5x + 3 - (-1)}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 + 5x + 4}{x + 1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x + 4) =$
3 ....1p

$f'_d(-1) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{ax^2+ax-1-(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{ax^2+ax}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{ax(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} ax = -a$......1p

$f'_s(-1) = f'_d(-1) \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow a = -3$..1p

c) $f|_{(-1;+\infty)} = ax^2 + ax - 1$

$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$ și $a > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0;2] \Rightarrow f$ injectivă$\Rightarrow$ ecuația $f(x) = 0$ are cel mult o soluție în intervalul $[0;2]$...1p

Funcția f continuă pe intervalul $[0;2] \Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux pe $[0;2]$

Cum $f(0)\cdot f(2) = -1(6a-1) = 1-6a < 0, (\forall) a > \frac{1}{6} \Rightarrow (\exists)x_0 \in (0;2)$ astfel încât $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ x_0 soluție unică a ecuației $f(x) = 0$ pe intervalul $[0;2] \Rightarrow x_0$ este singura rădăcină a funcției f pe intervalul $[0;2]$...1p

Altă soluţie:

Ne interesează doar restricţia funcţiei la intervalul $I = [0;2]$: $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + ax - 1$.

Cum f continuă şi $f(0) = -1$, $f(2) = 6a - 1 > 0$ 1p

iar $f'(x) = a(2x+1) > 0, \forall a > \frac{1}{6}$, $\forall x \in [0,2]$, deci funcţia este strict crescătoare pe [0,2],

rezultă că avem o singură soluţie în intervalul $I = [0;2]$ 1p

Subiectul 4.

Transpusă într-un sistem de axe ortogonale, o șosea e situată pe o curbă de ecuație $y = \sqrt{x+1}$ *și unește orașele A, B, C și D care au abscisele 0, 3, a și b, cu* $0 < a < b$ *. Prin orașul C este construită o autostradă care este tangentă la șosea și este paralelă cu dreapta determinată de orașele A și B.*

a) *Aflați coordonatele orașului C;*
b) *Determinați abscisa orașului D, știind că aria suprafeței de teren cuprinsă între orașele A, B și D este de 3* $(u.m)^2$.

SOLUȚIE:

a) Află $A(0,1), B(3,2); m_{AB} = \frac{1}{3}$; $m_t = m_{AB},$ 1p

$Definește\ f:[0,b] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1}\ funcție\ derivabilă$

$Calculează\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $f'(a) = \frac{1}{3}$ 1p

$Determină\ C\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$ 1p

b) $Obține\ |\Delta| = 6, \Delta = \pm 6$ 1p

$Calculează\ \Delta = 3\sqrt{b+1} - b - 3$ 1p

$Cazul\ I:\ \Delta = 6 \to nu\ există\ soluții$ 1p

$cazul\ II: \Delta = -6 \to obține\ b_1 = 0, b_2 = 6; soluție\ b = 15$ 1p