OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2[x]$. Arătaţi că funcţia f este bijectivă. (prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x)

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii, martie 2015

2. Rezolvaţi ecuaţia $\sum\limits_{k=1}^{n} a^{\log_a^k x} = n \cdot x^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \log_a^{k-1} x}$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 3$.

Ioana Maşca

3. Se consideră numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3, de modul egal cu 1, astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

   a) Arătaţi că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

   b) Calculaţi $z_1^{2015} + z_2^{2015} + z_3^{2015}$.

Cătălin Ciupală

4. Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(a, b) = a + b + \dfrac{1}{ab}$, unde $a, b > 0$ şi $a + b \leq 1$.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 26 februarie 2016
Soluţii

Clasa a X-a

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2[x]$. Arătaţi că funcţia f este bijectivă. (prin $[x]$ am notat partea întreagă a numărului real x)

Gazeta Matematică: Supliment cu Exerciţii, martie 2015

Soluţie.
Metoda 1.
Avem $f(x) = \{x\} - [x]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **(1p)**
Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $\{x_1\} - \{x_2\} = [x_1] - [x_2] \in \mathbb{Z}$. **(1p)**
Cum $\{x_1\}, \{x_2\} \in [0, 1)$, avem $\{x_1\} - \{x_2\} \in (-1, 1)$. Prin urmare $\{x_1\} - \{x_2\} = 0$, de unde $[x_1] - [x_2] = 0$, deci $x_1 = x_2$. Rezultă că funcţia f este injectivă. **(2p)**
Fie $y \in \mathbb{R}$. Ecuaţia $f(x) = y$, $x \in \mathbb{R}$, se reduce la $\{x\} - \{y\} = [x] + [y]$. **(1p)**
Deoarece $[x] + [y] \in \mathbb{Z}$, obţinem $\{x\} = \{y\}$, de unde $[x] = -[y]$. Astfel, ecuaţia $f(x) = y$ are soluţia $x = \{y\} - [y]$. Rezultă că f este surjectivă. **(2p)**
Metoda 2.
$(f \circ f)(x) = x - 2[x] - 2\big[x - 2[x]\big] = x - 2[x] - 2\big([x] - 2[x]\big) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. **(5p)**
Prin urmare, $f \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. Rezultă că f este inversabilă, deci bijectivă. **(2p)**

2. Rezolvaţi ecuaţia $\sum\limits_{k=1}^{n} a^{\log_a^k x} = n \cdot x^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \log_a^{k-1} x}$, unde $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$.

Ioana Maşca

Soluţie.
Ecuaţia este definită pentru $x > 0$.

$$\text{Avem } a^{\log_a^k x} = a^{\log_a x \cdot \log_a^{k-1} x} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a^{k-1} x} = x^{\log_a^{k-1} x},\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}. \ \textbf{(2p)}$$

Ecuaţia devine $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{\log_a^{k-1} x} = n \cdot x^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \log_a^{k-1} x}$. **(1p)**
Conform inegalităţii mediilor, avem

$$\sum_{k=1}^{n} x^{\log_a^{k-1} x} \geq n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x^{\log_a^{k-1} x}} = n \cdot x^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \log_a^{k-1} x}. \ \textbf{(2p)}$$

Inegalitatea mediilor devine egalitate dacă şi numai dacă toţi termenii sunt egali.
Atunci $x^{\log_a^{n-1} x} = \cdots = x^{\log_a x} = x$. Obţinem soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = a$. **(2p)**

3. Se consideră numerele complexe distincte z_1, z_2, z_3, de modul egal cu 1, astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

   a) Arătaţi că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic.

   b) Calculaţi $z_1^{2015} + z_2^{2015} + z_3^{2015}$.

Cătălin Ciupală

Soluţie.

a)

Metoda 1. Fie $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3. $\triangle ABC$ este înscris în cercul de rază 1, cu centrul în origine. **(1p)**
Fie G centrul de greutate şi H ortocentrul triunghiului ABC. Afixul lui G este $\frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{1}{3}$. Din relaţia $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ rezultă că afixul lui H este 1. **(2p)**
Rezultă că H aparţine cercului circumscris ΔABC, deci ΔABC este dreptunghic, cu un vârf de afix egal cu 1. **(1p)**

Metoda 2. Dacă $z_3 = 1$, atunci $z_1 + z_2 = 0$. **(1p)**
Dacă $z_3 \neq 1$, atunci $z_1 + z_2 = 1 - z_3 \neq 0$. (*)
Prin conjugare, deducem $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 = 1 - \overline{z}_3 \neq 0$. Deoarece z_1, z_2, z_3 au modulul egal cu 1, obţinem $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = 1 - \dfrac{1}{z_3}$, deci $\dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2} = \dfrac{1-z_3}{-z_3}$. **(1p)**
Din (*) rezultă $z_1z_2 = -z_3$. Înlocuind pe $-z_3$ în relaţia (*), găsim $z_1 + z_2 = 1 + z_1z_2$, sau $(z_1 - 1)(z_2 - 1) = 0$. Atunci $z_1 = 1$ şi $z_2 + z_3 = 0$ sau $z_2 = 1$ şi $z_3 + z_1 = 0$.
Deducem că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic. **(2p)**

b) Conform a), avem $z_1 + z_2 = 0$ şi $z_3 = 1$ (sau relaţiile analoage). **(1p)**
Rezultă $z_1^{2015} + z_2^{2015} + z_3^{2015} = z_1^{2005} - z_1^{2015} + 1 = 1$. **(2p)**

4. Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(a,b) = a + b + \dfrac{1}{ab}$, unde $a, b > 0$ şi $a + b \leq 1$.

Romeo Ilie

Soluţie.

Metoda 1. $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5$. **(1p)**

$$\begin{aligned} a+b+\frac{1}{ab} &= (a+b) + \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4ab} + \frac{1}{4ab} \ \textbf{(2p)} \\ &\geq 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{a+b}{4^4(ab)^4}} \ \textbf{(1p)} \\ &\geq 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{(a+b)^8}{4^4(ab)^4}} = 5 \cdot \sqrt[5]{\left[\frac{(a+b)^2}{4(ab)}\right]^4} \ \textbf{(1p)} \\ &\geq 5. \ \textbf{(1p)} \end{aligned}$$

Rezultă $\min\limits_{a,b>0,\ a+b\leq 1} E(a,b) = 5$. **(1p)**

Metoda 2. $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5$. **(1p)**

Fie $a, b > 0$, cu $a + b \leq 1$. Notăm $S = a + b \in (0, 1]$. Deoarece $0 < ab \leq \dfrac{S^2}{4}$, **(1p)** obţinem

$$E(a, b) - 5 \geq S + \frac{4}{S^2} - 5 = \frac{S^3 - 5S^2 + 4}{S^2} = \frac{(S-1)\left(S^2 - 4S - 4\right)}{S^2} \geq 0. \ \textbf{(4p)}$$

Rezultă $\min\limits_{a,b>0,\ a+b\leq 1} E(a, b) = 5$. **(1p)**