OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră ecuațiile:

1° $\left||x-2016|-|x-1|\right|=2015;$

2° $\left[\frac{x}{9}\right]=\left[\frac{x}{10}\right].$

unde cu $|x|$ și cu $[x]$ s-au notat modulul și, respectiv partea întreagă a numărului real x.

a) Arătați că $x=0$ este soluție pentru ecuația 1°.

b) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația 1°.

c) Câte numere naturale sunt soluții pentru ecuația 2° ?

Marin Neață și Eugen Predoiu, Călărași

Problema 2. Fie $a, b, c\in\mathbb{R}$, să se demonstreze că:

a) Dacă $ab+bc+ca=1$ atunci $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=(abc-a-b-c)^2$.

b) Dacă a și b sunt numere pozitive atunci $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

c) Dacă numerele a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi atunci $\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{a}+1\right)\left(\frac{c}{b}-\frac{a}{b}+1\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}+1\right)\leq 1.$

Cristina Bornea, Călărași

Problema 3. Se consideră tetraedrul regulat $VABC$. Dacă $VA=4a$ cm, $a\in(0,+\infty)$, $VO\perp(ABC)$; $O\in(ABC)$, M, N și P sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și, respectiv $[VO]$, atunci:

a) calculați volumul tetraedrului regulat $VABC$;

b) determinați lungimea proiecției segmentului $[VM]$ pe planul (ANP).

Stelică Pană, Chirnogi și Sorin Furtună, Călărași

Problema 4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ și un punct M care aparține interiorului triunghiului BCD. Paralele duse prin M la dreptele AB, AC și AD intersectează planele (ACD), (ABD) și, respectiv (ABC) în punctele A', B' și, respectiv C'. Dacă $AA'\cap(CD)=\{P\}$, $AB'\cap(BD)=\{Q\}$, $AC'\cap(BC)=\{M\}$ și $(BCD)\parallel(A'B'C')$, atunci:

a) demonstrați că $\frac{A'P}{AP}=\frac{B'Q}{AQ}=\frac{C'N}{AN}$;

b) demonstrați că M este centrul de greutate al triunghiului (BCD).

(G.M.)

SUCCES!

Problemele au fost selectate și prelucrate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este: Problema 1. a) 1 punct; **b)** 3 puncte; **b)** 3 puncte; **Problema 2. a)** 2 puncte; **b)** 1 punct; **b)** 4 puncte; **Problema 3. a)** 3 puncte; **b)** 4 puncte; **Problema 4. a)** 3 puncte; **b)** 4 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro