Olimpiada națională de matematică clasa aVI-a
Etapa locală- 16.02.2013

Subiectul 1

a) Arătați că numărul $n = 2^{2013} + 3^{2013}$ este divizibil cu 5.

b) Aflați numerele prime x, y, z astfel încât $5x + 10y + 2z = 50$.

Subiectul 2

Aflați numerele naturale $a,\ b,\ c$, știind că suma lor este 255 și că $a - 14,\ b - 4,\ c + 9$ sunt numere consecutive, din care $c + 9$ este cel mai mic.

Supliment cu exerciții
Gazeta matematica, octombrie, 2012

Subiectul 3

Fie punctele coliniare A , O , D unde $O \in (AD)$ și unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente, iar semidreapta $(OC$ este interioară unghiului $\sphericalangle BOD$. Dacă $m(\sphericalangle BOC) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC) = \frac{5}{3} \cdot m(\sphericalangle COD)$ și $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ iar Q punct interior unghiului $\sphericalangle BOD$ astfel încât $m(\sphericalangle MOQ) = 90^\circ$, se cere :

a) $m(\sphericalangle AOB)$, $m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle COD)$

b) Să se arate că $[OQ$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează cu 0 - 7 puncte
Nu se acordă puncte din oficiu
Timp efectiv de lucru 2 ore

Olimpiada nationala de matematica- Barem - clasa aVI-a
Etapa locală- 16.02.2013

Subiectul 1

Soluție: **a)**

$2013 = 4 \cdot 503 + 1$ .... 1 punct

$U(2^{2013}) = 2$, $U(3^{2013}) = 3$ .... 1 punct

$\Rightarrow U(2^{2013} + 3^{2013}) = 2 + 3 = 5 \Rightarrow n \vdots 5$ .... 1 punct

b)

$2z = 50 - 5x - 10y \Rightarrow 2z = 5(10 - x - 2y) \Rightarrow z = M_5$ şi z număr prim $\Rightarrow z = 5$ .... 2 puncte

$10 - x - 2y = 2 \Rightarrow x + 2y = 8 \Rightarrow x = 8 - 2y \Rightarrow x = 2(4 - y) \Rightarrow x = M_2$ şi x număr prim

$\Rightarrow x = 2$ şi $4 - y = 1 \Rightarrow y = 3$; în concluzie $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$

.... 2 puncte

Notă: pentru orice altă soluție corectă, se acordă punctajul maxim

Subiectul 2

Soluție:

$1^0)$ Dacă $a - 14 < b - 4 \Rightarrow c + 9, a - 14, b - 4$ sunt cosecutive în această ordine ....0,50 puncte

Deci $c + 9$, $(a - 15) + 1$, $(b - 6) + 2$ consecutive $\Rightarrow c + 9 = a - 15 = b - 6$ .... 1 puncte

Cum $a + b + c = 255$ şi $c = a - 24$, $b = a - 9$ .... 0,50 puncte

$\Rightarrow a + a - 9 + a - 24 = 255 \Rightarrow 3a - 33 = 255 \Rightarrow 3a = 288 \Rightarrow a = 96$ .... 1 punct

Obținem $b = 87$ şi $c = 72$ .... 0,50 puncte

$2^0)$ Dacă $b - 4 < a - 14 \Rightarrow c + 9, b - 4, a - 14$ sunt cosecutive în această ordine ....0,50 puncte

Deci $c + 9$, $(b - 5) + 1$, $(a - 16) + 2$ consecutive $\Rightarrow c + 9 = b - 5 = a - 16$ .... 1 punct

Cum $a + b + c = 255$ şi $c = a - 25$, $b = a - 11$ .... 0,50 puncte

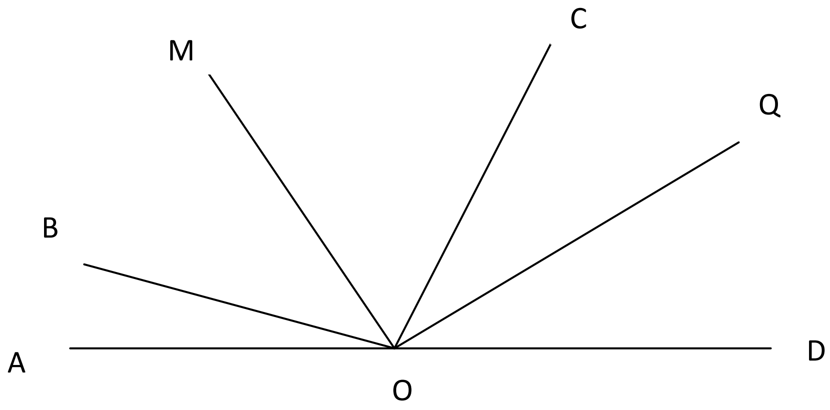
$\Rightarrow a + a - 11 + a - 25 = 255 \Rightarrow 3a - 36 = 255 \Rightarrow 3a = 291 \Rightarrow a = 97$ .... 1 punct

Obținem $b = 86$ şi $c = 72$ .... 0,50 puncte

Notă: pentru orice altă soluție corectă se acordă punctajul maxim

Str. 1 Decembrie nr.5, Cod 420080, Bistrița, Jud. B-N
Tel: +40 (0)263 213529
Fax: +40 (0)263 216654
www.isjbn.ro

Subiectul 3



Soluție: Desen ………………………………………………………………………………… 1 punct

a) A, O, D coliniare $\Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 180^\circ$ ....0,5 puncte

$$\left.\begin{array}{l} m(\sphericalangle BOC) = 5 \cdot m(\sphericalangle AOB) \\ m(\sphericalangle BOC) = \frac{5}{3} \cdot m(\sphericalangle COD) \end{array}\right\} \Rightarrow m(\sphericalangle COD) = \frac{3}{5} \cdot m(\sphericalangle BOC) = \frac{3}{5} \cdot 5 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 3 \cdot m(\sphericalangle AOB)$$ …1 punct

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^\circ \Rightarrow$

$m(AOB) + 5 \cdot m(\sphericalangle AOB) + 3 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow 9 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow$ ....1 punct

$m(\sphericalangle AOB) = 20^\circ$ ………………………………………………………………... 0,5 puncte

$m(\sphericalangle BOC) = 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ$ .... 0,5 puncte

$m(\sphericalangle COD) = \frac{3}{5} \cdot 100^\circ = 60^\circ$ ………………………………………………………….. 0,5 puncte

b) $[OM$ bisectoarea $\sphericalangle AOC \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOC) = \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle AOC) = 120^\circ : 2 = 60^\circ$ .....0,5 puncte

$m(\sphericalangle COQ) = m(\sphericalangle MOQ) - m(\sphericalangle MOC) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ……………………………...0,5 puncte

$m(\sphericalangle QOD) = m(\sphericalangle COD) - m(\sphericalangle COQ) = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ……………………………....0,5 puncte

Deci $[OQ$ este bisectoarea $\sphericalangle COD$ ……………………………………………………0,5 puncte

Notă: pentru orice altă soluție corectă se acordă punctajul maxim