Ministerul Educației

Societatea de Științe Matematice din România

Al doilea baraj de selecţie pentru OBMJ
București, 14 mai 2022

Problema 1.

Fie M, N și P mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB, ale triunghiului ascuțitunghic ABC. Notăm cu A', B' și C' punctele diametral opuse vârfurilor A, B, respectiv C în cercul circumscris triunghiului ABC. Pe segmentele deschise MA', NB' și PC' se consideră punctele X, Y, respectiv Z, astfel încât $\dfrac{MX}{XA'} = \dfrac{NY}{YB'} = \dfrac{PZ}{ZC'}$.

a) Demonstrați că dreptele AX, BY și CZ sunt concurente într-un punct S.

b) Arătați că $OS < OG$, unde O este centrul cercului circumscris, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Problema 2.

Determinați cel mai mare număr natural n pentru care este adevărată afirmația:

Există n numere naturale nenule distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu proprietatea că oricare ar fi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, nu toate nule, numărul n^3 nu divide numărul $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

Problema 3.

Se consideră o rețea formată din 49 de puncte, ce reprezintă vârfurile a 36 de pătrate de latură 1 în care este descompus un pătrat de latură 6.

Spunem că un pătrat cu vârfurile în punctele rețelei este *bun*, dacă laturile și diagonalele sale **nu** sunt pe laturile pătratelor rețelei.

a) Aflați numărul de pătrate bune care se pot forma cu vârfurile rețelei.

b) Arătați că există două pătrate bune disjuncte și necongruente, astfel încât cea mai mică distanță dintre punctele lor este $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Problema 4.

Fie a, b și c trei numere reale pozitive cu suma 3. Arătați că:

$$\frac{ab}{ab+a+b} + \frac{bc}{bc+b+c} + \frac{ca}{ca+c+a} + \frac{1}{9}\left(\frac{(a-b)^2}{ab+a+b} + \frac{(b-c)^2}{bc+b+c} + \frac{(c-a)^2}{ca+c+a}\right) \leqslant 1.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Al doilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 14 mai 2022
Soluții și bareme

Problema 1.

Fie M, N și P mijloacele laturilor BC, CA respectiv AB ale triunghiului ascuțitunghic ABC. Notăm cu A', B' și C' punctele diametral opuse vârfurilor A, B, respectiv C, în cercul circumscris triunghiului ABC. Pe segmentele deschise MA', NB' și PC' se consideră punctele X, Y, respectiv Z, astfel încât $\frac{MX}{XA'} = \frac{NY}{YB'} = \frac{PZ}{ZC'}$.

a) Demonstrați că dreptele AX, BY și CZ sunt concurente într-un punct S.

b) Arătați că $OS < OG$, unde O este centrul cercului circumscris, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Soluție. a) Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Patrulaterul $BHCA'$ este un paralelogram (BH și $A'C$ sunt perpendiculare pe dreapta AC, iar CH și $A'B$ sunt perpendiculare pe dreapta AB), prin urmare punctul M este mijlocul segmentului HA'. ... **1p**

Dacă $\frac{MX}{XA'} = k$, atunci

$$\frac{A'X}{XM} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{A'X}{A'M} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{A'X}{A'H} = \frac{1}{2k+2} \Rightarrow \frac{A'X}{XH} = \frac{1}{2k+1}.$$

... **1p**

Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și S punctul în care dreapta AX intersectează dreapta Euler OH.

Folosind teorema lui Menelau în triunghiul HOA' cu transversala $X-S-A$ obținem:

$$\frac{HS}{SO} \cdot \frac{OA}{AA'} \cdot \frac{A'X}{XH} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{SO} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{SO} = 4k+2.$$

... **1p**

Considerând punctele de intersecție dintre dreapta Euler și dreptele BY, respectiv CZ, vom obține că ele împart segmentul HO în același raport $4k+2$, deci coincid cu punctul S. Prin urmare, dreptele AX, BY și CZ sunt concurente (iar punctul lor comun este situat pe dreapta Euler). ... **2p**

b) Raportul k parcurge intervalul $(0, \infty)$, deci raportul $\frac{HS}{SO} = 4k+2$ parcurge intervalul $(2, \infty)$. ... **1p**

Obținem $HS > 2OS$, deci $OS < \frac{OH}{3} = OG$. ... **1p**

Soluție alternativă pentru punctul a).

$ABA'B'$ este dreptunghi, deci $A'B' = AB \stackrel{\text{not.}}{=} c$.

MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN \parallel AB \parallel A'B'$, așadar $MNB'A'$ este trapez. Deoarece $\dfrac{MX}{XA'} = \dfrac{NY}{YB'}$, rezultă că $XY \parallel MN \parallel A'B'$. **1p**

Fie $E \in A'B'$, astfel încât $ME \parallel NB'$ și $\{F\} = ME \cap XY$.

Deoarece $MNB'E$ este paralelogram și $FY \parallel MN$, avem $EB' = FY = MN = \dfrac{c}{2}$.

Din asemănarea triunghiurilor MXF și $MA'E$ obținem $\dfrac{XF}{A'E} = \dfrac{MX}{MA'} \stackrel{\text{not.}}{=} t$, așadar $XF = t \cdot A'E = t \cdot \dfrac{c}{2}$ și $XY = XF + FY = \dfrac{(t+1) \cdot c}{2}$. **2p**

Deoarece $XY \parallel A'B' \parallel AB$, rezultă că $ABXY$ este trapez. Fie $\{S\} = AX \cap BY$. Din asemănarea triunghiurilor ASB și XSY obținem $\dfrac{SX}{SA} = \dfrac{SY}{SB} = \dfrac{XY}{AB} = \dfrac{t+1}{2}$. **1p**

Analog rezultă că patrulaterul $BCYZ$ este trapez. Fie $\{S'\} = BY \cap CZ$.

Ca mai înainte, deducem că $\dfrac{S'Y}{S'B} = \dfrac{t+1}{2}$, deci $S = S'$, așadar dreptele AX, BY și CZ sunt concurente. **1p**

Al doilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 14 mai 2022
Soluții și bareme

Problema 2.

Determinați cel mai mare număr natural n pentru care este adevărată afirmația:

Există n numere naturale nenule distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu proprietatea că oricare ar fi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, nu toate nule, numărul n^3 nu divide numărul $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

Soluție. Pentru $n = 9$ alegem $x_1 = 2^0, x_2 = 2^1, \ldots, x_9 = 2^8$. Oricare ar fi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, avem:

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leq 1 + 2 + \ldots + 2^8 = 2^9 - 1 < 9^3.$$

Dacă 9^3 divide $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, rezultă că $a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + \ldots + a_n \cdot 2^8 = 0$. Din considerente de paritate obținem că $a_1 = 0$. Simplificând cu 2 și urmărind din nou paritatea, vom avea $a_2 = 0$ etc. Obținem că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt toate nule, contradicție. Ca urmare, $n = 9$ are proprietatea din enunț. **3p**

Dacă $n \geqslant 10$, atunci $2^n > n^3$.

Fie $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o mulțime de n numere naturale nenule (distincte) și $\mathcal{P}(A)$ mulțimea părților sale. Cum $|\mathcal{P}(A)| = 2^n > n^3$, folosind principiul lui Dirichlet obținem două submulțimi diferite B și C ale lui A astfel încât

$$\sum_{x \in B} x \equiv \sum_{x \in C} x \pmod{n^3}.$$

Alegând $a_i = 1$ pentru elementele lui $B \setminus C$, $a_j = -1$ pentru elementele lui $C \setminus B$ și $a_k = 0$ pentru celelalte elemente ale lui A, găsim o combinație $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ care se divide cu n^3. Așadar, numerele $n \geqslant 10$ nu au proprietatea din enunț, deci numărul căutat este $n = 9$. **4p**

Observații.

(O1) Pentru simpla scriere, fără nicio justificare, a unui exemplu corect în cazul $n = 9$ nu s-a acordat niciun punct.

(O2) Pentru nedemonstrarea faptului că pentru $n \geq 10$ are loc inegalitatea $2^n > n^3$ s-a scăzut un punct din cele 4 aferente.

Al doilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 14 mai 2022
Soluții și bareme

Problema 3.

Se consideră o rețea formată din 49 de puncte, ce reprezintă vârfurile a 36 de pătrate de latură 1 în care este descompus un pătrat de latură 6.

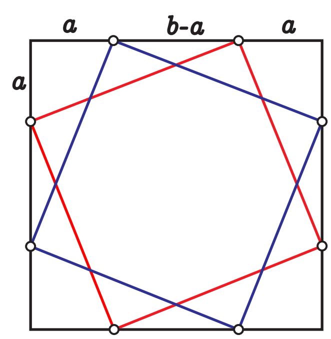
Spunem că un pătrat cu vârfurile în punctele rețelei este *bun*, dacă laturile și diagonalele sale **nu** sunt pe laturile pătratelor rețelei.

a) Aflați numărul de pătrate bune care se pot forma cu vârfurile rețelei.

b) Arătați că există două pătrate bune disjuncte și necongruente, astfel încât cea mai mică distanță dintre punctele lor este $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Soluție. a) Spunem că un pătrat este *normal*, dacă are vârfurile în punctele rețelei și laturile sale se află pe drepte ale rețelei paralele cu laturile pătratului 6×6, sau pe laturile pătratului 6×6. Orice pătrat bun are vârfurile pe laturile unui pătrat normal, a cărui lungime a laturii poate fi egală cu 3, 4, 5 sau 6. Fie un pătrat normal de latură $x\in\{3,4,5,6\}$. Latura unui pătrat bun înscris în acesta are lungimea de forma $\sqrt{a^2+b^2}$, unde $a,b\in\{1,2,\ldots,x-1\}$, $a\neq b$, astfel încât $a+b=x$.

Într-adevăr, dacă $a=0$, sau $b=x$, atunci laturile pătratului bun sunt pe laturile pătratelor rețelei, iar dacă $a=b$, atunci laturile pătratului bun sunt paralele cu diagonalele pătratului mare, deci diagonalele sale sunt pe dreptele suport ale rețelei, fals. **1p**



Dacă $a,b\in\{1,2,\ldots,x-1\}$, cu $a\neq b$ și $a+b=x$, fiecare pătrat normal de latură x conține exact două pătrate bune generate de perechea (a,b), având latura de lungime $\sqrt{a^2+b^2}$ și ale căror vârfuri sunt pe laturile acestuia, ca în figura alăturată. **1p**

Pentru $x=3=1+2$, în fiecare pătrat normal de latură 3 sunt înscrise exact două pătrate bune, generate de $(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}$. De aici, în fiecare bandă orizontală de forma 6×3 există $2\cdot 4=8$ pătrate bune de latură $\sqrt{5}$. Deoarece sunt 4 benzi orizontale de lățime 3, în total există $8\cdot 4=32$ pătrate bune de latură $\sqrt{5}$.

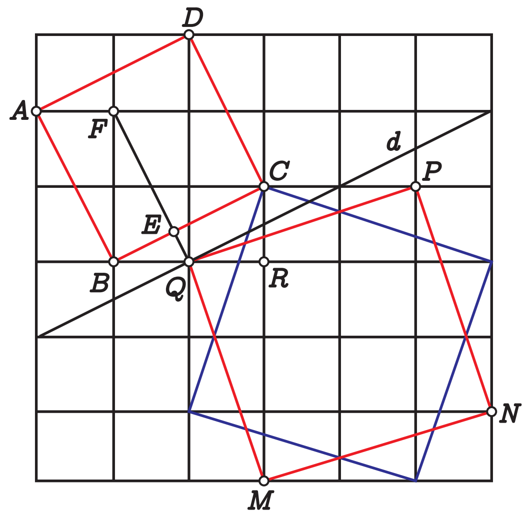
Analog se arată că există:

- 18 pătrate bune de latură $\sqrt{10}$, generate de $(a,b)\in\{(1,3),(3,1)\}$,
- 8 pătrate bune de latură $\sqrt{17}$, generate de $(a,b)\in\{(1,4),(4,1)\}$,
- 2 pătrate bune de latură $\sqrt{26}$, generate de $(a,b)\in\{(1,5),(5,1)\}$,
- 8 pătrate bune de latură $\sqrt{13}$, generate de $(a,b)\in\{(2,3),(3,2)\}$

- 2 pătrate bune de latură $\sqrt{20}$, generate de $(a,b) \in \{(2,4),(4,2)\}$.

Numărul tuturor pătratelor bune este: $32+18+8+4+2+4+2=70$. **3p**

b) Alegem pătratele bune $ABCD$ și $MNPQ$ ca în figura alăturată, cu $AB = \sqrt{5}$ și $MN = \sqrt{10}$, astfel încât A, D, M și N sunt pe laturile pătratului mare.



Fie dreapta d care trece prin Q și este paralelă cu BC. Deoarece $MNPQ$ este inclus în semiplanul $[dM$, rezultă că distanța căutată este cea de la Q la $ABCD$. Alegem punctele R și F astfel încât Q este mijlocul segmentului BR, triunghiul BFQ este dreptunghic în B, cu $BF = 2$, iar F și M sunt de o parte și de alta a dreptei d.

Deoarece triunghiurile BQF și RCB sunt congruente, rezultă că dreptele BC și FQ sunt perpendiculare, iar distanța căutată este egală cu lungimea segmentului QE, unde Q este punctul de intersecție a dreptelor BC și FQ. Cu teorema catetei, rezultă că $EQ = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **2p**

Observații. 1) Dacă $a, b \in \{1, 2, \ldots, x-1\}$, cu $a+b=x$, în fiecare bandă orizontală de forma $6 \times (a+b)$ există $2 \cdot \big(7-(a+b)\big)$ pătrate bune de latură $\sqrt{a^2+b^2}$. Deoarece sunt $7-(a+b)$ benzi orizontale de lățime $a+b$, în total există $2 \cdot (7-a-b)^2$ pătrate bune de latură $\sqrt{a^2+b^2}$, generate de perechile (a,b) și (b,a).

2. Se poate arăta că singurele tipuri de pătrate bune necongruente care nu au vârfuri comune și au interioarele disjuncte sunt cele de mai înainte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Al doilea baraj de selecție pentru OBMJ
București, 14 mai 2022
Soluții și bareme

Problema 4.
Fie a, b și c trei numere reale pozitive cu suma 3. Arătați că:

$$\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{bc}{bc+b+c}+\frac{ca}{ca+c+a}+\frac{1}{9}\left(\frac{(a-b)^2}{ab+a+b}+\frac{(b-c)^2}{bc+b+c}+\frac{(c-a)^2}{ca+c+a}\right)\leqslant 1.$$

Soluția 1. Avem $\dfrac{ab}{ab+a+b}+\dfrac{(a-b)^2}{9(ab+a+b)}=\dfrac{a^2+7ab+b^2}{9(ab+a+b)}$ **1p**

Vom arăta că

$$\frac{a^2+7ab+b^2}{ab+a+b}\leqslant a+b+1. \qquad (1)$$

Această inegalitate se scrie echivalent

$$a^2+7ab+b^2\leqslant a^2+3ab+b^2+a^2b+ab^2+a+b \Leftrightarrow a^2b+ab^2+a+b\geqslant 4ab.$$

Din inegalitatea mediilor avem $a^2b+b\geqslant 2ab$ și $ab^2+a\geqslant 2ab$, deci inegalitatea (1) este adevărată. **5p**

Scriind și inegalitățile analoage, deducem că:

$$\sum\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{1}{9}\sum\frac{(a-b)^2}{ab+a+b}\leqslant\frac{1}{9}\sum(a+b+1)=1.$$

.... **1p**

Soluția 2. Avem $ab+a+b=ab+(a+b)\cdot\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{a^2+b^2+5ab+ac+bc}{3}$. . **1p**

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{(a-b)^2}{9(ab+a+b)}-\frac{1}{3}&=\frac{9ab+(a^2+b^2-2ab)-(a^2+b^2+5ab+ac+bc)}{9(ab+a+b)}\\&=\frac{b(a-c)}{9(ab+a+b)}+\frac{a(b-c)}{9(ab+a+b)}.\end{aligned}$$

.... **2p**

Atunci

$$\sum\frac{ab}{ab+a+b}+\frac{1}{9}\sum\frac{(a-b)^2}{ab+a+b}-1=\sum\left(\frac{b\,(a-c)}{9\,(ab+a+b)}+\frac{a\,(b-c)}{9\,(ab+a+b)}\right)=$$

$$=\sum\left(\frac{b\,(a-c)}{9\,(ab+a+b)}+\frac{b\,(c-a)}{9\,(bc+b+c)}\right)=\sum\frac{-b\,(a-c)^2\,(b+c)}{9\,(ab+a+b)\,(bc+b+c)}\leq 0.$$

.... **4p**

Observație. Egalitatea se obține pentru $a=b=c=1$.