OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

Suma a două numere naturale este 2016. Dacă ambele numere se împart la 4 se obțin câturi a căror diferență este 468. Aflați numerele.

SUBIECTUL 2

Arătați că mulțimile A și B sunt disjuncte, unde

$A = \{2^{2n+4} \cdot 9^n + 4^n \cdot 3^{2(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{(1 + 6 + 11 + \cdots + 2016)^n + 5 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

SUBIECTUL 3

Fie numărul n=9 + 99 + 999 +...+ $\underbrace{99\ldots9}_{2016\ cifre}$ + 2016.

a) Arătați că numărul n este divizibil cu 90.

b) Aflați câtul și restul împărțirii lui n la 11111.

SUBIECTUL 4

De *Ziua Prieteniei* fiecare elev din clasa a V-a A dăruia fiecărui coleg de clasă o felicitare. Anul acesta li s-au alăturat și colegii din altă clasă astfel schimbându-se cu 2726 felicitări mai multe decât anul trecut. Știind că în fiecare clasă sunt cel puțin 25 elevi aflați câte felicitări s-au schimbat anul trecut.

Notă:
Timp de lucru: 2 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.
Nu se acordă puncte din oficiu.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 21.02.2016
Clasa a V-a
Barem de corectare şi notare

SUBIECTUL 1
$a = 4 \cdot c_1 + r_1 \ , r_1 < 4$
$b = 4 \cdot c_2 + r_2 \ , r_2 < 4$ **1p**
$4 \cdot (c_1 + c_2) + r_1 + r_2 = 2016 \ \in M_4 \Rightarrow r_1 + r_2 \in M_4$.........................**1p**
$r_1, r_2 \in \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow r_1 + r_2 \in \{0; 4\}$..**1p**
$r_1 + r_2 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 504$ și $c_1 - c_2 = 468 \Rightarrow c_1 = 486 \, , c_2 = 18$ **2p**
$r_1 + r_2 = 4 \Rightarrow c_1 + c_2 = 503$ și $c_1 - c_2 = 468 \Rightarrow c_1 \notin \mathbb{N}$ **1p**
$a = 4 \cdot 486 = 1944$ și $b = 4 \cdot 18 = 72$ **1p**

SUBIECTUL 2
$2^{2n+4} \cdot 9^n + 4^n \cdot 3^{2(n+1)} = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 25$..**2p**
$n = 0 \ \Rightarrow 2^0 \cdot 3^0 \cdot 25 = 25; \ (1 + 6 + 11 + \cdots + 2016)^0 + 5 = 6$.................................. **1p**
$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u(2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 25) = 0$ **1p**
$1 + 6 + 11 + \cdots + 2016 = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 403) + 404 = 5 \cdot 403 \cdot 202 + 404$.........**1p**
$u((1 + 6 + 11 + \cdots + 2016)^n + 5) \in \{1; 9\}$..**1p**
$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ și B disjuncte **1p**

SUBIECTUL 3
a) $n = 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \cdots + \ 1\underbrace{00\ldots0}_{2016\ zerouri} \ - 1 + 2016$ **1p**
$= 10 + 100 + 1000 + \cdots + \ 1\underbrace{00 \ldots 0}_{2016\ zerouri} \ - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \cdots 1)}_{2016\ cifre\ 1} + 2016 =$
$\underbrace{111\ldots1}_{2016\ cifre\ 1}0 \ - 2016 + 2016 = \ \underbrace{111\ldots1}_{2016\ cifre\ 1}0$ **1p**
$\underbrace{111\ldots10} \ \vdots \ 10$ **1p**
Cum suma cifrelor este 2016, deci divizibilă cu 9, iar (9;10)=1⇒ $n \ \vdots \ 90$...........**1p**
b) $n = \ \underbrace{111 \ldots 1}_{2016\ cifre\ 1}0 \ = 11111 \cdot 10^{2012} + 11111 \cdot 10^{2007} + \cdots + 11111 \cdot 10^{5k+2} +$
$+ \cdots + 11111 \cdot 10^2 + 10 =$.. **1p**
$= 11111 \cdot c + 10 \Rightarrow r = 10$..**1p**
$c = 10^{2012} + 10^{2007} + \cdots + 10^2$...**1p**

SUBIECTUL 4
Fie x numărul de elevi ai clasei a V-a A și y numărul de elevi ai celeilalte clase
$x \cdot y + y \cdot x + y \cdot (y - 1)$ felicitări în plus.. **1p**
$y \cdot (2x + y - 1) = 2726$..**1p**
$2726 = 2 \cdot 29 \cdot 47$ **1p**
$y \geq 25 \Rightarrow \ y = 29 \ \Rightarrow \ 2x + y - 1 = 94 \ \Rightarrow x = 33$ .... **2 p**
$y \geq 25$ și $x \geq 25 \Rightarrow 2x + y - 1 \geq 74 \Rightarrow$ soluție unică **1p**
$x \cdot (x - 1) = 33 \cdot 32 = 1056$ numărul de felicitări schimbate anul trecut **1p**

Notă : Orice altă soluţie corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim .