Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Clasa a VII-a

Problema 1

Calculaţi :

a) $2,7 \cdot \left\{3 - \frac{18}{19} \cdot [0,5 + 0,(5)]\right\} - 13$

b) $\frac{1}{0,(3)} + \frac{1}{0,(03)} + \frac{1}{0,(003)} + \frac{1}{0,(0003)}$

Problema 2

Aflaţi numărul $a \in \mathbb{N}$ care verifică relaţia :

$a^n - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2014}$ **ştiind că**

$$n = \sqrt{2015} \cdot \sqrt{45 + \sqrt{10}} \cdot \sqrt{7 + \sqrt{4 + \sqrt{10}}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{4 + \sqrt{10}}}$$

Problema 3

Fie ABCD un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$, M mijlocul lui $[OC]$ şi N mijlocul lui $[OD]$. Ştiind că $A_{\Delta BMC} = a^2$, calculaţi raportul dintre ariile patrulaterelor ABCD şi ABMN.

Problema 4

Fie ABCD trapez $(AB \parallel CD, AB < CD)$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$, $AF \cap DE = \{P\}$, $BF \cap CD = \{Q\}$. Arătaţi că $AB \parallel PQ$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -14.02.2015
Barem de notare
Clasa a VII-a

Problema 1 .

a) $2{,}7\cdot\left\{3-\frac{18}{19}\cdot[0{,}5+0,(5)]\right\}-13=\frac{27}{10}\cdot\left(3-\frac{18}{19}\cdot\frac{19}{18}\right)-13=\frac{27}{10}\cdot 2-13$ ....2 p

$0{,}5+0,(5)=\frac{5}{10}+\frac{5}{9}=\frac{1}{2}+\frac{5}{9}=\frac{9+10}{18}=\frac{19}{18}$ 1p

Finalizare : rezultat $-\frac{38}{5}$ 1p

b) $\frac{1}{0,(3)}+\frac{1}{0,(03)}+\frac{1}{0,(003)}+\frac{1}{0,(0003)}=$ 1p

$=\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{33}}+\frac{1}{\frac{1}{333}}+\frac{1}{\frac{1}{3333}}$ 1p

$=3+33+333+3333=$..1p

$=3\cdot(1+11+111+1111)=3\cdot 1234=3702$ 1p

Problema 2.

$n=\sqrt{2015}\cdot\sqrt{45+\sqrt{10}}\cdot\sqrt{49-4-\sqrt{10}}$ 1p

$=\sqrt{2015}\cdot\sqrt{45+\sqrt{10}}\cdot\sqrt{45-\sqrt{10}}$... 1p

$=\sqrt{2015}\cdot\sqrt{2025-10}$ 1p

$=\sqrt{2015}\cdot\sqrt{2015}=2015$ 1p

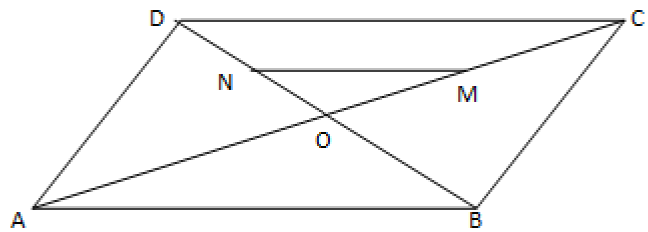
$a^n=1+2^0+2^1+\cdots+2^{2014}$ 1p

$a^n=2^1+2^1+2^2\ldots+2^{2014}=2^2+2^2+2^3+\cdots+2^{2014}$

$a^n=2^{2015}$... 1p

$a^{2015}=2^{2015}\Rightarrow a=2015$ 1p

Problema 3 .



Solutie :

[BM] - mediană în triunghiul BOC 1p

$A_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$ 1p

$A_{ABCD} = 8A_{BMC} = 8 \cdot a^2$ 1p

[MN] linie mijlocie în tr. DOC $\Rightarrow$ MN ∥ DC ∥ AB $\Rightarrow ABMN - trapez$ 1p

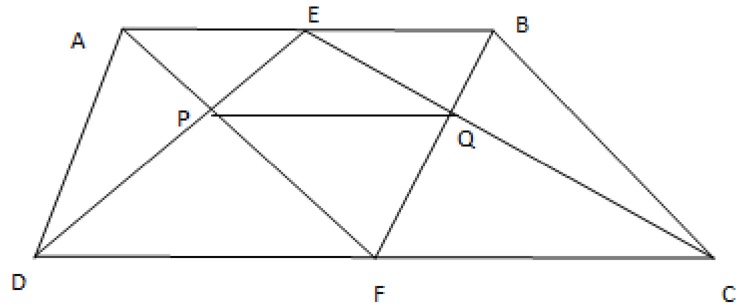
[MN] mediana in tr. CON

$A_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot A_{CON} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A_{DOC} = \frac{1}{4} \cdot A_{DOC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} A_{ABCD} = \frac{1}{16}\, 8 \cdot a^2 = \frac{a^2}{2}$.......... 1p

$A_{ABMN} = A_{AOB} + A_{BOM} + A_{MON} + A_{AON} = 2a^2 + a^2 + \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{9a^2}{2}$ 1p

$\frac{A_{ABCD}}{A_{ABMN}} = \frac{8a^2}{\frac{9a^2}{2}} = \frac{16}{9}$ 1p

Problema 4 .



Solutie

$AE \,||DF \xrightarrow{T.F.A.} \frac{PE}{PD} = \frac{AP}{PF} = \frac{AE}{DF}(1\,)$ .... 2 p

$BE\,||FC \xrightarrow{T.F.A.} \frac{BQ}{BC} = \frac{EQ}{QC} = \frac{EB}{FC}(\,2)$ ....2 p

$\left.\begin{matrix}[AE] \equiv [EB] \\ [DF] \equiv [FC]\end{matrix}\right\rangle \xRightarrow{1)\;\; si\; 2\,)} \frac{PE}{PD} = \frac{EQ}{QC}$.. 2 p

cf. reciprocei Th lui Thales $\Rightarrow$ PQ ‖ AB ....1 p