Inspectoratul Şcolar Judeţean Buzău

Societatea de Ştiinţe Matematice Filiala Buzău

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a IX-a

1. Numerele naturale impare sunt grupate în felul următor:

$$\{1\},\{3,5\},\{7,9,11\},\{13,15,17,19\},\ldots$$

Aflaţi suma numerelor din grupa numărul n. Justificaţi răspunsul.

2. Să se arate că ecuaţia

$$[x]\cdot\{x\}=\frac{2013}{2014}$$

are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

3. Fie a şi b numere pozitive care verifică

$$a\leq 1,\quad a+b\leq 5.$$

Să se arate că

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq 3.$$

Când are loc egalitatea?

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M\in(AB)$ şi $N\in(AC)$. Segmentele MC şi NB se intersectează în punctul T. Dreapta AT intersectează MN şi BC în punctele P şi D.

Să se arate că rapoartele

$$\frac{AM}{MB},\ \frac{AP}{PD},\ \frac{AN}{NC}$$

sunt în progresie aritmetică.

Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

Olimpiada de matematică 2014
faza locală

Clasa a IX-a
Soluţii şi bareme

1. Numerele naturale impare sunt grupate în felul următor:

$$\{1\},\{3,5\},\{7,9,11\},\{13,15,17,19\},...$$

Aflaţi suma numerelor din grupa numărul n. Justificaţi răspunsul.

Soluţie. Se observă că suma căutată este, probabil, n^3. . . . . 1p

Se arată uşor prin inducţie (sau direct) că suma primelor n numere naturale impare este $S_n = n^2$. 2p

În primele n grupe se află $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ numere impare, iar în primele $n-1$ grupe, $\frac{n(n-1)}{2}$ numere impare. 2p

Deducem că suma căutată este

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} - S_{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^3.$$

. . . . 2p

2.Să se arate că ecuaţia

$$[x]\cdot\{x\} = \frac{2013}{2014}$$

are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

Soluţie. O clasă de soluţii este, de exemplu,

$$x = 2013n + \frac{1}{2014n},$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Doar o soluţie particulară (sau un număr finit de astfel de soluţii) 1p

O clasă infinită de soluţii 7p

3. Fie a şi b numere pozitive care verifică

$$a \le 1,\quad a+b \le 5.$$

Să se arate că

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \le 3.$$

Când are loc egalitatea?

Soluţie. Avem

$$2\left(\sqrt{a}-1\right)^2 + \left(\sqrt{b}-2\right)^2 \ge 0,$$

. . . . 3p

inegalitate echivalentă cu

$$4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \le 2a+b+6.$$

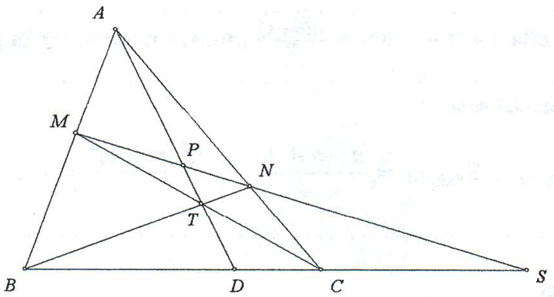
. . . . 1p

Dar
$$2a+b+6=a+(a+b)+6\le 1+5+6=12,$$
de unde concluzia..2p

Egalitatea are loc dacă $a=1$ şi $b=4$..1p

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M\in(AB)$ şi $N\in(AC)$. Segmentele MC şi NB se intersectează în punctul T. Dreapta AT intersectează MN şi BC în punctele P şi D. Să se arate că rapoartele
$$\frac{AM}{MB},\ \frac{AP}{PD},\ \frac{AN}{NC}$$
sunt în progresie aritmetică.

Soluţie.



Avem de arătat că
$$\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=2\cdot\frac{AP}{PD} \qquad (*)$$
....1p

Dacă $MN||BC$, cele trei rapoarte sunt egale şi concluzia e evidentă....................1p

Dacă nu, fie $\{S\}=MN\cap BC$. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ABD, obţinem
$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{PD}{PA}\cdot\frac{SB}{SD}=1.$$
de unde $\frac{PD}{PA}=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{SB}{SD}$..3p

Similar, $\frac{PD}{PA}=\frac{AN}{NC}\cdot\frac{SC}{SD}$. Înlocuind în $(*)$ $2\cdot\frac{PD}{PA}=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{SB}{SD}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{SC}{SD}$ şi efectuând calculul, obţinem
$$\frac{AN}{NC}\cdot\frac{MB}{AM}\cdot\frac{CD}{BD}=1,$$
relaţie adevărată, care rezultă din teorema lui Ceva...2p