OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

CLASA A X-A

1.) Rezolvați ecuațiile de mai jos:

a) $3^n + 2^n = 9^{\log_2 n} + n^2,\ n \in \mathbb{N}^*$

b) $\left(625^x + 5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x + 3^{\frac{1}{x}}\right) = 900,\ x \in \mathbb{R}^*$.

2.) Dacă $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in [2,3]$, arătați că:

$$\log_{a_1}(5a_2 - 6) + \log_{a_2}(5a_3 - 6) + ... + \log_{a_{n-1}}(5a_n - 6) + \log_{a_n}(5a_1 - 6) \geq 2n$$

3.) Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, astfel încât $f(f(x)) = 4x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că:

a) $f(0) = 0$

b) $f(4^n) = 4^n f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}$

4.) **a)** Determinați elementele mulțimii: $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1\, és \left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 \right\}$.

b) Fie α și β soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

Calculați valoarea expresiei: $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016}$.

c) Arătați că pentru $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ are loc inegalitatea: $|z+1| + |z^2+1| + |z^3+1| \geq 2$

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se punctează cu 10 puncte.

Timp de lucru 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A X-A

1.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $3^n+2^n=9^{\log_2 n}+n^2 \Leftrightarrow 3^{\log_2 2^n}+2^n=3^{\log_2 n^2}+n^2$	**1p**
	Fie $f:N\to R,\ f(x)=3^{\log_2 x}+x \Rightarrow$ ecuaţia de mai sus este echivalentă cu $f(2^n)=f(n^2)$	**2p**
	Funcţia *f* este strict crescătore, deci injectivă adică $f(2^n)=f(n^2)\Leftrightarrow 2^n=n^2$	**1p**
	Soluţiile naturale ecuaţiei sunt $n_1=2, n_2=4$.	**1p**
	b) Dacă $x<0$, atunci fiecare factor din membrul stâng este mai mic decât 2, deci produsul fiind mai mic decât 4, nu poate fi egal cu 900.	**1p**
	Pentru sumele din paranteze aplicăm inegalitatea mediilor: $\left(625^x+5^{\frac{1}{x}}\right)\left(81^x+3^{\frac{1}{x}}\right)\geq 2\sqrt{625^x\cdot 5^{\frac{1}{x}}}\cdot 2\sqrt{81^x\cdot 3^{\frac{1}{x}}}=2\cdot 25^x\cdot 5^{\frac{1}{2x}}\cdot 2\cdot 9^x\cdot 3^{\frac{1}{2x}}=$ $=4\cdot 5^{2x+\frac{1}{2x}}\cdot 3^{2x+\frac{1}{2x}}=4\cdot 15^{2x+\frac{1}{2x}}\geq 4\cdot 15^2=900$	**2p**
	Avem egalitate atunci şi numai atunci, dacă $2x+\dfrac{1}{2x}=2\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$	**1p**

2.)	**Din oficiu**	**1p**
	Din $a_k\in[2,3]$ pentru $\forall k=\overline{1,n}$, obținem $(a_k-2)(a_k-3)\leq 0\Leftrightarrow 5a_k-6\geq a_k^2\ \forall k=\overline{1,n}$	**3p**
	Aplicând rezultatul de mai sus și inegalitatea mediilor obținem: $\log_{a_1}(5a_2-6)+\log_{a_2}(5a_3-6)+...+\log_{a_{n-1}}(5a_n-6)+\log_{a_n}(5a_1-6)\geq$ $\geq\log_{a_1}a_2^2+\log_{a_2}a_3^2+...+\log_{a_{n-1}}a_n^2+\log_{a_n}a_1^2=$	**3p**
	$=2\left(\dfrac{\lg a_2}{\lg a_1}+\dfrac{\lg a_3}{\lg a_2}+...+\dfrac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}}+\dfrac{\lg a_1}{\lg a_n}\right)\geq 2n\sqrt[n]{\dfrac{\lg a_2}{\lg a_1}\cdot\dfrac{\lg a_3}{\lg a_2}\cdot...\cdot\dfrac{\lg a_n}{\lg a_{n-1}}\cdot\dfrac{\lg a_1}{\lg a_n}}=2n\sqrt[n]{1}=2n$	**3p**

3.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) Înlocuind $f(x)$ în relația $f\big(f(x)\big)=4x$ obținem $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=4f(x)$ pe de altă parte $(f\circ f\circ f)(x)=f(4x)$	**2p**
	Din cele două relații rezultă că $f(4x)=4f(x)$ și pentru $x=0$ se obține $f(0)=0$.	**2p**

	b) Din $f(4x) = 4f(x)$, pentru $x = 1, 4, 4^2, \dots, 4^{n-1}$. Rezultă că $f(4^n) = 4^n f(1)$.	**2p**
	Demonstrația se face prin inducție matematică.	**3p**

4.)	**Din oficiu**	**1p**
	a) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$. Din $\|z\| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$	**1p**
	$\left\|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right\| = 1 \Leftrightarrow \frac{\left\|z^2 + \bar{z}^2\right\|}{\|z\bar{z}\|} = 1 \Leftrightarrow \left\|z^2 + \bar{z}^2\right\| = 1 \Rightarrow \left\|a^2 - b^2\right\| = \frac{1}{2}$	**2p**
	Rezolvând sistemul de ecuații $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \left\|a^2 - b^2\right\| = \frac{1}{2} \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$ obținem soluțiile: $z = \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i\frac{1}{2}$	**2p**
	b) Deoarece α și β sunt soluțiile ecuației $z^2 - z + 1 = 0$ $\Rightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 = 0,\ \beta^2 - \beta + 1 = 0 \Rightarrow \alpha - 1 = \alpha^2, \beta - 1 = \beta^2$	**1p**
	Înmulțind ecuațiile cu $\alpha + 1$, respectiv $\beta + 1 \Rightarrow \alpha^3 = -1, \beta^3 = -1$ de unde obținem: $(\alpha - 1)^{2016} + (\beta - 1)^{2016} = \left(\alpha^3\right)^{1344} + \left(\beta^3\right)^{1344} = 2$	**2p**
	c) $2 = 2\|z\| = \|2z\| = \left\|(z+1) + z\left(z^2 + 1\right) + \left(-z^3 - 1\right)\right\| \le \|z+1\| + \|z\| \cdot \left\|z^2 + 1\right\| + \left\|z^3 + 1\right\|$	**1p**