OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 16.02.2013
Clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

Subiectul 1

$g(x)=\begin{cases} x\cdot f(x), x\geq 0 \\ -x\cdot f(x), x<0 \end{cases}$; f admite primitive $\Rightarrow \exists\, F:R\to R$, derivabilă, cu $F`=f$

$x\cdot f(x)=[x\cdot F(x)]`-F(x)$ 1 p

F derivabilă $\Rightarrow F$ continuă $\Rightarrow F$ admite primitive. Fie $H:R\to R$, derivabilă, cu $H`=F$

$x\cdot f(x)=[x\cdot F(x)]`-H`(x)=[x\cdot F(x)-H(x)]`$; $-x\cdot f(x)=[-x\cdot F(x)+H(x)]`$ 2 p

Definim funcţia $G:R\to R, G(x)=\begin{cases} xF(x)-H(x)+c, x\geq 0 \\ -xF(x)+H(x)+c`, x<0 \end{cases}$. $F$, $H$ sunt derivabile pe $R\Rightarrow G$ derivabilă pe $R^*$ şi $G`=g$ pe R^* 1 p

G continuă în $x_0=0\Rightarrow c`=c-2H(0)\Rightarrow G(x)=\begin{cases} xF(x)-H(x)+c, x\geq 0 \\ -xF(x)+H(x)+c-2H(0), x<0 \end{cases}$ 1 p

$$G`_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{xF(x)-H(x)+c+H(0)-c}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(F(x)-\frac{H(x)-H(0)}{x}\right)=F(0)-H`(0)=F(0)-F(0)=0$$

$$G`_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-xF(x)+H(x)+c-2H(0)+H(0)-c}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(-F(x)+\frac{H(x)-H(0)}{x}\right)=-F(0)+H`(0)=-F(0)+F(0)=0$$

$\Rightarrow G$ derivabilă în $x_0=0$ și $G`(0)=g(0)=0$. În concluzie, G e o primitivă pentru g, deci funcția g admite primitive. 2p

Subiectul 2

a) $I_1=\int tgx\cdot tg2x\,dx=\int tgx\cdot\frac{2tgx}{1-tg^2x}dx=\int\frac{2tg^2x}{1-tg^2x}\cdot\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x}dx$ 1p

$\begin{matrix} tgx=t \\ (1+tg^2x)dx=dt, t\in(0,1) \end{matrix}\Rightarrow I_1`=2\int\frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt\Rightarrow I_1`=\int\frac{1}{1-t^2}dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt$ 1p

Deci $I_1=-\frac{1}{2}\ln\frac{1-tgx}{1+tgx}-x+\mathcal{C}$ 1p

b) $I_{n+4}-I_n=\int(tg^nx)(tg^4x-1)\cdot tg2xdx=-\int(tg^nx)\cdot(1-tg^2x)(1+tg^2x)\frac{2tgx}{1-tg^2x}dx$

vezi a) $=-\frac{2tg^{n+2}x}{n+2}+\mathcal{C}$ 4 p

Subiectul 3

Din comutativitate $\Rightarrow f(x)-2x=f(y)-2y, \forall x,y\in R$ 1 p

$\Rightarrow f(x)-2x$ este funcție constantă $\Rightarrow f(x)=2x+a, a\in R$ 2 p

Din asociativitate $\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$ 2 p

Funcția este: $f(x)=2x+\dfrac{2}{3}$. Legea este: $x\circ y=2x+2y+3xy+\dfrac{2}{3}$. Avem: lege internă, comutativă, asociativă 1 p

Se determină elementul neutru $e=-\dfrac{1}{3}$ 1 p

Subiectul 4

a) Se găsesc 3 numere care nu verifică asociativitatea (De exemplu $(2\circ 3)\circ 5\neq 2\circ(3\circ 5)$)

1 p

b) Se analizează cazurile $x=6k, x=6k+1,..., x=6k+5$

Se obțin soluțiile $x=6k+1, x=6k+2, x=6k+5, k\in Z$

3 p

c) Se observă (din $x \bmod 3\in\{0,1,2\}$ și $x \bmod 2\in\{0,1\}$) că $x\circ y$ nu poate lua alte valori în afară de 0,1,2,3

Deci $H\subseteq\{0,1,2,3\}$ 1 p

Se arată că $1\notin H$ 1 p

Folosind $1\notin H$, se arată că $2\notin H, 3\notin H$, deci $H=\{0\}$ 1 p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CONSTANȚA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 16.02.2013
Clasa a XII-a

Subiectul 1
Fie $f: R \to R$ o funcţie care admite primitive.
Să se arate că funcţia $g: R \to R, g(x) = |x| \cdot f(x)$ admite primitive.

G.M.

Subiectul 2
Fie $I_n = \int tg^n x \cdot tg 2x\, dx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in N^*$

a) Să se calculeze I_1.
b) Să se găsească o relaţie de recurenţă pentru I_n.

Prof. Arventiev Dorin

Subiectul 3
Determinaţi numărul funcţiilor $f: R \to R$ pentru care legea de compoziţie $x \circ y = 2x + f(y) + 3xy$, determină pe R o structură de monoid comutativ.

Prof. Homentcovschi Cristina

Subiectul 4
Pe Z definim legea de compoziţie $x \circ y = (x+y) \bmod 3 + (x \cdot y) \bmod 2$, unde notaţia $x \bmod n$ reprezintă restul împărţirii lui *x* la *n*.

a) Să se arate că legea nu este asociativă.
b) Să se determine $x \in Z$ pentru care $x \circ (5 \circ 7) = x \circ (5 \circ x)$.
c) Să se determine $H \subset Z$ astfel încât $(H, \circ)$ să fie grup.

Prof. Homentcovschi Cristina

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu