

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M₁

Problema 1

Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Problema 2

a) Să se arate că $\int \cos(x^3 + 1) dx = x \cos(x^3 + 1) + 3 \int x^3 \sin(x^3 + 1) dx$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int (4 + 9x^6) \cos(x^3 + 1) dx$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Problema 3

Pe \mathbb{Z} se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$. Să se determine restul împărțirii lui $\underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{\text{de 2014 ori}}$ la 3^{2014} .

Problema 4

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset M_3(\mathbb{R})$.

a) Să se arate că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că (G, \cdot) formează o structură de grup.

c) Să se arate că $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A_x) = x$ este un izomorfism de la (G, \cdot) la $(\mathbb{R}, +)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală - 15.02.2014****Clasa a XII-a M₂****Problema 1**

Pe \mathbb{R} definim legea de compoziție asociativă, $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- Calculați $1 * 2 * \dots * 2014$.
- Există $a, b \in \mathbb{R} / \mathbb{Q}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$? *Justificați răspunsul.*

Problema 2

Să se calculeze integralele $I = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ și $J = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$, unde $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3

Fie $f, F : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $F(x) = (ax+b)\sqrt{x-1}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât F este o primitivă pentru f .

Problema 4

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Să se arate că (G, \cdot) este grup.
- Arătați că $f : \mathbb{Z} \rightarrow G, f(x) = A(x)$ este un izomorfism de la $(\mathbb{Z}, +)$ la (G, \cdot) .

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -15.02.2014

Clasa a XII-a M₁

Soluții și bareme

1. Funcția f este continuă pe \mathbb{R} , deci admite primitive pe \mathbb{R} . Utilizăm formula de integrare prin părți. ...1p

$$\text{Cum } \left[\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{|x|} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{|x|(1+x^2)}, (\forall) x \in \mathbb{R}^*, \quad \dots 1p$$

$$\text{obinem: } \int \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = \int (x)' \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \int \frac{2|x|}{1+x^2} dx, \quad \dots 2p$$

Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $(\exists) c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \ln(1+x^2) + c_1, & x < 0 \\ c_2, & x = 0 \\ x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \ln(1+x^2) + c_3, & x > 0 \end{cases} \quad \dots 1p$$

Cum F este continuă, din condiția $F(0-0) = F(0+0) = F(0)$, obținem $c_1 = c_2 = c_3$, ...1p

$$\Rightarrow F(x) = c + \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \ln(1+x^2), & x \leq 0 \\ x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \ln(1+x^2) + c_3, & x > 0 \end{cases}, \text{ unde } c \in \mathbb{R}. \quad \dots 1p$$

2. a) Utilizăm formula de integrare prin părți, avem:

$$\int \cos(x^3 + 1) dx = \int (x^3)' \cos(x^3 + 1) dx = x^3 \cos(x^3 + 1) + 3 \int x^2 \sin(x^3 + 1) dx. \quad \dots 3p$$

b) Utilizând formula de integrare prin părți, obținem:

$$I = \int 4 \cos(x^3 + 1) dx = \int (4x)' \cos(x^3 + 1) dx = 4x \cos(x^3 + 1) + 12 \int x^3 \sin(x^3 + 1) dx = \dots\dots 1p$$

$$= 4x \cos(x^3 + 1) + 12 \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \sin(x^3 + 1) dx = 4x \cos(x^3 + 1) + 12 \frac{x^4}{4} \sin(x^3 + 1) - 12 \int \frac{x^4}{4} \cdot 3x^2 \cos(x^3 + 1) dx = \dots\dots 1p$$

$$= 4x \cos(x^3 + 1) + 3x^4 \sin(x^3 + 1) - \underbrace{\int 9x^6 \cos(x^3 + 1) dx}_J, \Rightarrow \dots\dots 1p$$

$$\int (4 + 9x^6) \cos(x^3 + 1) dx = I + J = 4x \cos(x^3 + 1) + 3x^4 \sin(x^3 + 1) + C. \dots\dots 1p$$

3. $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 = x(y - 2) - 2(y - 2) + 2 = (x - 2)(y - 2) + 2, (\forall) x, y \in \mathbb{Z} \dots\dots 1p$

$x * x = (x - 2)^2 + 2, x * x * x = (x * x) * x = (x - 2)^3 + 2, \dots, \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2, (\forall) x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \dots\dots 1p$

Demonstrăm prin inducție: Fie $x \in \mathbb{Z}, P(n): \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. P(2)$ este adevărat. $\dots\dots 1p$

Presupunem $P(k)$ adevărat și demonstrăm $P(k + 1)$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ arbitrar fixat.

$$P(k + 1): \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } k + 1 \text{ ori}} = \underbrace{(x * x * \dots * x)}_{\text{de } k \text{ ori}} * x = [(x - 2)^k + 2 - 2](x - 2) + 2 = (x - 2)^{k + 1} + 2, \text{ deci } P(k + 1) \text{ adevărat.}$$

Aadar $P(n)$ adevărat $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \dots\dots 2p$

Avem $\underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{\text{de } 2014 \text{ ori}} = (5 - 2)^{2014} + 2 = 3^{2014} + 2$ și restul împărțirii la 3^{2014} este 2. $\dots\dots 2p$

$$4. a) A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 5y^2 - 2y \\ 0 & 1 & 5y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y + 2x & 5y^2 - 2y + 10xy + 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5y + 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2(x + y) & 5(x + y)^2 - 2(x + y) \\ 0 & 1 & 5(x + y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x + y}, (\forall) x, y \in \mathbb{R}. \dots\dots 2p$$

b) Din a) $A_x \cdot A_y = A_{x + y}, x + y \in \mathbb{R}$, deci $A_x \cdot A_y \in G, (\forall) A_x, A_y \in G$, deci înmulțirea este lege pe G (1) $\dots\dots 0,5p$

Observăm că $A_x = A_y \Leftrightarrow x = y$. Înmulțirea matricelor este asociativă pe $M_3(\mathbb{R}), G \subset M_3(\mathbb{R})$, deci și pe G (2) $\dots\dots 0,5p$

$A_0 = I_3 \in G$, deci înmulțirea admite element neutru (3). $\dots\dots 0,5p$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $A_x \cdot A_{-x} = A_{-x} \cdot A_x = A_0 = I_3$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4). $\dots\dots 0,5p$

- Din (1),(2),(3),(4) rezult (G, \cdot) grup.0,5p
- c) $f(A_x \cdot A_y) = f(A_{x+y}) = x + y = f(A_x) + f(A_y), (\forall) A_x, A_y \in G$, deci f morfism (A)1p
- Fie $A_x, A_y \in G$ astfel încât $f(A_x) = f(A_y) \Rightarrow x = y \Rightarrow A_x = A_y \Rightarrow f$ injectiv (B_1)0,5p
- Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci $(\exists) A_y \in G$ astfel încât $f(A_y) = y$, deci f surjectiv (B_2)0,5p
- Din (B_1) i (B_2) rezult f bijectiv (B) . Din (A) i (B) rezult f izomorfism.0,5p

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M₂

Soluții și bareme

1. a) $2(x-3)(y-3)+3=2(x^2-3x-3y+9)+3=2xy-6x-6y+21=x*y, (\forall)x, y \in \mathbb{R}. \dots\dots 2p$

b) Căutăm "zeroul" legii: $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a*x = x*a = a, (\forall)x \in \mathbb{R}.$

$a*x=a \Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)+3=a \Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)-(a-3)=0 \Leftrightarrow (a-3)[2(x-3)-1]=0, (\forall)x \in \mathbb{R},$ deci $a-3=0 \Rightarrow a=3, \dots\dots 2p$

verificăm $x*3=2(x-3)(3-3)+3=3, (\forall)x \in \mathbb{R},$ deci $3*x=x*3=3, (\forall)x \in \mathbb{R}. \dots\dots 1p$

Avem $1*2*\dots*2014 \stackrel{"" \text{ asociativă}}{=} (1*2)*3*(4*\dots*2014)=3*(4*\dots*2014)=3. \dots\dots 1p$

c) Răspunsul este afirmativ. Putem lua, spre exemplu, $a=3+\sqrt{3}, b=3+2\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$

obținem $a*b=2(3+\sqrt{3}-3)(3+2\sqrt{3}-3)+3=15 \in \mathbb{N}. \dots\dots 1p$

2. Avem $I+J = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + C,$ respectiv $\dots\dots 2p$

$-I+J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = \ln|\sin x + \cos x| + C \stackrel{x \in (0, \frac{\pi}{2})}{=} \ln(\sin x + \cos x) + C \dots\dots 2p$

$I = \frac{1}{2}[(I+J) - (-I+J)] = \frac{1}{2}[x - \ln(\sin x + \cos x)] + C,$ iar $\dots\dots 1,5p$

$J = \frac{1}{2}[(I+J) + (-I+J)] = \frac{1}{2}[x + \ln(\sin x + \cos x)] + C \dots\dots 1,5p$

3. F este primitiv pentru $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x), (\forall)x \in (1, \infty) \Leftrightarrow [(ax+b)\sqrt{x-1}]' = \sqrt{x-1}, (\forall)x \in (1, \infty) \Leftrightarrow \dots\dots 2p$

$a\sqrt{x-1} + (ax+b) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2a(x-1) + (ax+b) = 2(x-1) \Leftrightarrow 3ax + (b-2a) = 2x-2, (\forall)x \in (1, \infty) \Rightarrow \dots\dots 3p$

$\begin{cases} 3a = 2 \\ b - 2a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}. \dots\dots 2p$

4. a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$ i cum $x+y \in \mathbb{Z}$, rezult $A(x) \cdot A(y) \in G$, deci

înmul irea este lege pe G (1).1p

Înmul irea matricelor este asociativ pe $M_2(\mathbb{R})$, $G \subset M_2(\mathbb{R})$, deci i pe G (2).1p

$A(0) = I_2 \in G$, deci înmul irea admite element neutru (3).1p

$(\forall) x \in \mathbb{Z}$, avem $A(x) \cdot A(-x) = A(-x) \cdot A(x) = A(0) = I_2$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4).1p

Din (1),(2),(3),(4) rezult (G, \cdot) grup.

b) $f(x+y) = A(x+y) \stackrel{a)}{=} A(x) \cdot A(y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$, deci f morfism (A)1p

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow A(x) = A(y) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injectiv (B_1)1p

Fie $A(x) \in G$, atunci $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = A(x)$, deci f surjectiv (B_2)1p

Din (B_1) i (B_2) rezult f bijectiv (B) . Din (A) i (B) rezult f izomorfism.