Inspectoratul Scolar Judetean Gorj

OLIMPIADA NATIONALA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, CLASA A -IX-A

15 februarie 2015

1. a) Demonstrați că $3^{n-1} > 2^n - 1, \forall n \in N^*, n \geq 3$;
   b) Să se determine numărul natural n pentru care
   $a^n + b^n + c^n + (a+b+c)^n = (a+b)^n + (b+c)^n + (a+c)^n$,
   oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$. G.M.

2. Rezolvați în N ecuația $\left[\sqrt{n^2+4n+9}\right] = 3n - 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică ai cărei termeni sunt numere naturale. Dacă progresia are un termen egal cu 1936, arătați că ea conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte. B.M.

4. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ și $N \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Notăm cu P mijlocul lui (BC) și cu R punctul de intersecție al dreptelor AP și MN. Dacă $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AP}$ determinați valoarea lui k.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7p.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ – 2015-GORJ

CLASA a IX-a

Barem de notare

1. a) Demonstrați că $3^{n-1} > 2^n - 1, \forall n \in N^*, n \geq 3$;
   b) Să se determine numărul natural n pentru care
   $a^n + b^n + c^n + (a+b+c)^n = (a+b)^n + (b+c)^n + (a+c)^n$,
   oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$. G.M.

   Soluție: a) Inducție după n: p(3): 9>7, adev. Presupunem p(k) adev. șI demonstrăm p(k+1):$3^k > 2^{k+1} - 1$.
   Avem $3^k = 3^{k-1} \cdot 3 > (2^k - 1) \cdot 3 > 2^{k+1} - 1$. (3p)
   b) Pentru n=1 și n=2 relația este adevărată. (2p)
   Pentru a=b=c=1 obținem $3 + 3^n = 3 \cdot 2^n \Leftrightarrow 3^{n-1} = 2^n - 1$ relație care este falsă pentru ≥ 3 . (2p)

2. Rezolvați în N ecuația $\left[\sqrt{n^2 + 4n + 9}\right] = 3n - 4$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. B.M.

   Soluție: Avem $\sqrt{(n+2)^2} < \sqrt{n^2 + 4n + 9} < \sqrt{(n+3)^2}$ pentru $n > 0$, deci $\left[\sqrt{n^2 + 4n + 9}\right] = n + 2$ pentru $n > 0$. (4p)

   Ecuația devine n+2=3n-4, cu soluția n=3. (2p)

   Pentru n=0 nu verifică. (1p)

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică ai cărei termeni sunt numere naturale. Dacă progresia are un termen egal cu 1936, arătați că ea conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte. B.M.

   Soluție: Dacă rația progresiei este 0, atunci toți termenii sunt 1936=44^2 deci sunt pătrate perfecte. (2p) Dacă rația este nenulă considerăm p astfel încât $a_p = 1936$. Atunci $a_{p+k+1} = a_p + kr$, deci $a_{p+k+1} = 1936 + kr$. Alegem $k = rm^2 + 88m$, unde $m \in N$, și obținem $a_{p+k+1} = 1936 + r^2m^2 + 88rm = (rm + 44)^2$ este pătrat perfect pentru orice m natural. (5p)

4. Fie ABC un triunghi, $M \in (AB)$ astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ și $N \in (AC)$ astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Notăm cu P mijlocul lui (BC) și cu R punctul de intersecție al dreptelor AP și MN. Dacă $\overrightarrow{AR} = k \cdot \overrightarrow{AP}$ determinați valoarea lui k. B.M.

   Soluție: Din MP||AN deducem $\frac{MP}{AN} = \frac{PR}{AR} \Leftrightarrow \frac{AC:2}{3AC:4} = \frac{PR}{AR} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{PR}{AR} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AP}{AR} \Longrightarrow \overrightarrow{AR} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AP}$. (7p)

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu 7p.