## Olimpiada de matematică
## Etapa locală - 16 februarie 2013

### Clasa a XI-a

**1.** Pentru orice $x,y\in[0,\infty)$ considerăm determinantul $\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$.

**a)** Demonstraţi că $\Delta(x,y)\geq 0$ pentru orice $x,y\in[0,\infty)$;

**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\Delta(x,1)}{\ln(x^3-3x+3)}$.

**2.** **a)** Daţi exemplu de două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

**b)** Daţi exemplu de două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ nu există.

**3.** **a)** Fie $X\in M_2(\mathbb{C})$. Demonstraţi că $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ există $a_n, b_n\in\mathbb{C}$ astfel încât $X^n=a_nX+b_nI_2$;

**b)** Fie matricele $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB-BA=A$. Demonstraţi că $A^2=O_2$ şi $AB^nA=O_2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

*Gazeta Matematică – nr.11/2012*

**4.** Considerăm numerele reale $a,b>0$. Definim şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relaţiile:

$$a_0=a,\ b_0=b,\ a_{n+1}=\frac{a_n+\sqrt{a_nb_n}}{2},\quad b_{n+1}=\frac{b_n+\sqrt{a_nb_n}}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

**a)** Demonstraţi că şirurile sunt convergente şi au aceeaşi limită;
**b)** Calculaţi limita celor două şiruri.

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

## Olimpiada de matematică
## Etapa locală - 16 februarie 2013

### Clasa a XI-a - barem

**1. a)** Se obţine $\Delta=(x+2y)(x-y)^2\ge 0$ **4p**

**b)** Avem $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\Delta(x,1)}{\ln(x^3-3x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)^2}{\ln(x^3-3x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{\ln(x^3-3x+3)}=1$ **3p**

**2. a)** De exemplu $a_n=2-\frac{1}{n}$ şi $b_n=\frac{1}{n}$. Se demonstrează că îndeplinesc condiţiile din enunţ. **3p**

**b)** De exemplu $a_n=1-(-1)^n$ şi $b_n=1+(-1)^n$. Se demonstrează că îndeplinesc condiţiile din enunţ. **4p**

**3. a)** Din teorema Hamilton-Cayley, avem $X^2=Tr(X)X-\det(X)I_2$, care verifică ipoteza pentru $n=2$. **1p**
Apoi se aplică inducţia matematică. **2p**

**b)** Din ipoteză obţinem $Tr(A)=0$, iar din $AB=A(B+I_2)$ obţinem $\det(A)=0$. Teorema Hamilton-Cayley conduce al concluzia $A^2=O_2$. **2p**
Folosind punctul anterior, avem $B^n=a_nB+b_nI_2$ şi atunci $AB^nA=a_nABA+b_nA^2=a_nA(A+AB)=O_2$. **2p**

**4. a)** Cazul $a=b$ este banal. Analizăm doar cazul $a<b$, celălalt fiind analog.
Din $a<b$, deducem $a<\sqrt{ab}<b$, de unde obţinem $a_0<a_1<b_1<b_0$. Prin inducţie deducem că $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente. **2p**
Apoi avem $a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2}$, de unde $|a_{n+1}-b_{n+1}|=\frac{1}{2}|a_n-b_n|$. Obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ şi concluzia **2p**

**b)** Avem $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Apoi $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}$, de unde $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2^n}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Suntem conduşi la $a_n=\frac{\frac{1}{2^n}(b-a)}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2^n}}-1}$, care prin trecere la limită ne conduce la $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$. **3p**

**NOTĂ**

- Orice soluţie corectă se punctează corespunzător.

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA,
jud. HUNEDOARA
Tel: +40 (0)254213315, +40(0)254215755
Fax: +40 (0)254215034, +40(0) 254220911
e-mail: inspectorat@isj.hd.edu.ro
http://isj.hd.edu.ro