Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

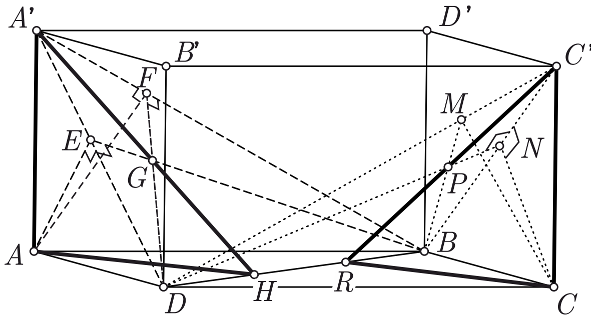
Soluţii şi barem – clasa a VIII-a

Problema 1.

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, unde $a > b > c > 0$, E şi F sunt proiecţiile lui A pe $A'D$, respectiv pe $A'B$, iar M şi N sunt proiecţiile lui C pe $C'D$, respectiv pe $C'B$. Fie $DF \cap BE = \{G\}$ şi $DN \cap BM = \{P\}$.

a) Demonstraţi că planele $(A'AG)$ şi $(C'CP)$ sunt paralele şi aflaţi distanţa dintre cele două plane.

b) Demonstraţi că dreapta GP este paralelă cu planul (ABC) şi aflaţi distanţa de la dreapta GP la planul (ABC).



Soluţie: a) Din $AB \perp (ADA')$ şi $AE \perp A'D$ reiese $BE \perp A'D$; analog $DF \perp A'B$. Astfel, G este ortocentrul $\triangle A'BD$, deci $A'G \perp BD$. Pe de altă parte, $AA' \perp (ABD)$ implică $AA' \perp BD$. Astfel, $BD \perp (A'AG)$ (1).

Analog rezultă $BD \perp (C'CP)$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $(A'AG) \parallel (C'CP)$.

Intersecţia planului $(A'AG)$ cu BD este $\{H\} = A'G \cap BD$, intersecţia planului $(C'CP)$ cu BD este $\{R\} = C'P \cap BD$ iar distanţa dintre cele două plane este HR.

Din $A'G \perp BD$ şi $A'A \perp (ABD)$ rezultă $AH \perp BD$; analog $CR \perp BD$. Cu teorema catetei avem $DH = \dfrac{DA^2}{DB} = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = BR$, deci $HR = \dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) Fie $GG' \parallel AA'$, $G' \in AH$ (3) şi $PP' \parallel CC'$, $P' \in CR$ (4). Atunci $\dfrac{GG'}{AA'} = \dfrac{HG}{HA'}$ şi $\dfrac{PP'}{CC'} = \dfrac{RP}{RC'}$. Dar, deoarece $\triangle A'BD \equiv \triangle C'DB$ (LLL) şi G, respectiv P sunt ortocentrele acestor triunghiuri, $\dfrac{HG}{HA'} = \dfrac{RP}{RC'}$. Rezultă astfel $GG' = PP'$. Pe de altă parte, din (3) şi (4) reiese că G', P' sunt proiecţiile lui G, respectiv P pe planul (ABC). De aici reiese că G şi P sunt egal distanţate de planul (ABC) şi de aceeaşi parte a acestuia, deci $GP \parallel (ABC)$, iar distanţa de la GP la (ABC) este GG'.

Din $AE \perp A'D$ şi $BE \perp A'D$ obţinem $A'D \perp (ABE)$; cum $A'D \subset (A'BD)$, obţinem $(ABE) \perp (A'BD)$. Analog obţinem $(ADF) \perp (A'BD)$, deci AG – dreapta de intersecţie a planelor (ABE), (ADF) – este perpendiculară pe $(A'BD)$. Din triunghiurile dreptunghice formate obţinem

$$AH = \frac{AD \cdot AB}{BD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ AG = \frac{AH \cdot AA'}{A'H},\ GH = \frac{AH^2}{A'H}$$

$$GG' = \frac{AG \cdot GH}{AH} = \frac{AG \cdot AH}{A'H} = \frac{AH^2 \cdot AA'}{A'H^2} = \frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Barem de corectare:

a) $(A'AG) \parallel (C'CP)$ **2p**

distanţa dintre plane **1p**

b) $GP \parallel (ABC)$ **2p**

distanţa dintre dreapta GP şi planul (ABC) **2p**

Problema 2.

Arătaţi că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + 7.$$

Când are loc egalitatea?

Soluţia 1: Scăzând 9 din ambii membri, inegalitatea revine la

$$\sum \frac{(a-b)^2}{ab} \geq \sum \frac{(a-b)^2}{ab+bc+ca},$$

ceea ce este evident. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c$.

Barem de corectare:

scade 9 din ambii membri **2p**

rescrie membrul stâng **2p**

rescrie membrul drept **1p**

concluzia **1p**

deduce cazul de egalitate **1p**

Soluţia 2: Eliminând numitorii se ajunge la $a^3b^2+a^2b^3-2a^2b^2c+a^3c^2-2a^2bc^2-2ab^2c^2+b^3c^2+a^2c^3+b^2c^3 \geq 0$. Această inegalitate rezultă imediat din inegalitatea lui Muirhead: $[3,2,0] \geq [2,2,1]$ sau din inegalitatea mediilor, adunând relaţia $a^3b^2+a^3b^2+c^3b^2 \geq 3a^2b^2c$ cu cele cinci relaţii analoage ei şi împărţind apoi la 3.

Barem de corectare:

elimină corect numitorii **1p**

aplică inegalitatea Muirhead (sau altfel) şi demonstrează inegalitatea obţinută **5p**

deduce cazul de egalitate **1p**

Notă: Nu se va acorda niciun punct pentru simpla ghicire a cazului de egalitate.

Problema 3.

Determinaţi numerele reale x şi y care verifică relaţiile

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 2022 \text{ şi } x+y = \frac{2021}{\sqrt{2022}}.$$

Soluţie. Dacă notăm $z = x+\sqrt{x^2+1}$ şi $t = y+\sqrt{y^2+1}$, atunci avem $z \neq 0$ şi $\frac{1}{z} = \sqrt{x^2+1}-x$. Rezultă că $2x = z - \frac{1}{z}$ şi, analog, $2y = t - \frac{1}{t}$. Avem $zt = 2022$ şi $z+t-\frac{1}{z}-\frac{1}{t} = \frac{2 \cdot 2021}{\sqrt{2022}}$, adică $(z+t)\cdot\frac{zt-1}{zt} = \frac{2\cdot 2021}{\sqrt{2022}}$. Deducem că $z+t = 2\sqrt{2022}$. Atunci $z + \frac{2022}{z} = 2\sqrt{2022}$ revine la $\frac{(z-\sqrt{2022})^2}{z} = 0$. Deducem că $z = \sqrt{2022}$, apoi că $t = \sqrt{2022}$, deci că $x = y = \frac{2021}{2\sqrt{2022}}$, valori care verifică într-adevăr sistemul.

Barem de corectare:

cu sau fără notaţie, consideră z şi conjugata lui z **1p**

deduce în mod corect unica soluţie a sistemului **5p**

demonstrează (sau afirmă) că perechea găsită satisface sistemul **1p**

Notă: Dacă elevul foloseşte inegalitatea mediilor fără ca din demonstraţia sa să fie evident că variabilele sunt pozitive, el va fi depunctat cu **1p**.

Problema 4.

Elevii dintr-o clasă de $n \geq 2$ elevi au avut de rezolvat 2^{n-1} probleme ca temă de vacanţă. La verificare, profesorul constată că, pentru orice pereche de probleme diferite:

• există cel puţin un elev care le-a rezolvat pe amândouă şi

• există cel puţin un elev care a rezolvat una dintre ele, dar nu şi pe cealaltă.

Arătaţi că există o problemă rezolvată de toţi elevii clasei.

Soluţie. Numerotăm problemele de la 1 la 2^{n-1}. Pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, notăm cu A_k mulţimea elevilor care au rezolvat problema cu numărul k. Atunci ipoteza ne spune că mulţimile A_k sunt două câte două distincte şi că $A_k \cap A_p \neq \varnothing$, $\forall \{k, p\} \subset \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$.

Considerăm cele 2^n submulţimi ale mulţimii, E, a tuturor elevilor din clasă şi le grupăm în perechi de forma $\{M,\ E \setminus M\}$. Aceste 2^{n-1} perechi sunt disjuncte. Mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n-1}}$ sunt 2^{n-1} submulţimi distincte ale lui E, dar printre ele nu putem avea două submulţimi dintr-o aceeaşi pereche deoarece acestea ar fi disjuncte. Aşadar, în fiecare pereche putem avea cel mult una din mulţimile A_k. Deoarece sunt 2^{n-1} perechi şi tot atâtea mulţimi A_k, în fiecare pereche vom avea exact una din mulţimile A_k. Astfel, în perechea $\{\varnothing,\ E\}$, cum $A_k \neq \varnothing$, $\forall\, k$, mulţimea E este cea care trebuie să fie egală cu un A_ℓ, cu $\ell \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$. Atunci problema cu numărul ℓ a fost rezolvată de toţi elevii.

Barem de corectare:

consideră, pentru fiecare problemă, mulţimea elevilor care au rezolvat-o **1p**

consideră perechile de forma $\{M,\ E \setminus M\}$ **2p**

deduce că în fiecare pereche avem exact un A_k **2p**

finalizează uitându-se la perechea $\{\varnothing,\ E\}$ **2p**