



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

I) Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}$

a) Demonstrați ca (M, \cdot) este monoid.

b) Fie $A \in M$ și $X \in M_2(Z)$. Arătați că dacă $AX = XA$, atunci $X \in M$ sau există $\alpha \in Z$ astfel încât $A = \alpha \cdot I_2$.

c) Demonstrați că M are o infinitate de elemente inversabile.

G.M. 10/2012

II) Fie (G, \cdot) un grup cu e elementul neutru și $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Arătați că: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} \cdot y^{2013} = xy$

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. Traian Tămăian

III) a) Verificați identitatea: $\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \right)' = -\frac{\sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2}, \forall x \in (1, \infty)$.

b) Calculați $\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2} \cdot e^x dx, \quad x \in (1, \infty)$.

Prof. Adrian Bud

IV) Fie $a > 0$ și funcția $f: [0, a] \rightarrow R$, de două ori derivabilă pe $[0, a]$, cu derivate a doua continuă pe $[0, a]$

și $f(a) = f'(a) = 0$. Să se arate că pentru orice $k \in \{1, 2\}$ au loc relațiile

a) $\int_0^a f(x) dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x) dx,$

b) $\left(\int_0^a f(x) dx \right)^2 \leq \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx.$

Prof. Gigel Buth și matematician Gelu Râmbu



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

Barem de corectare

I.

- a) Demonstrează ca este monoid 3 puncte
 b) 3 puncte
 c) Exemplu 1 punct

II.

- a) Din $x^2 = (xy)^2 \Rightarrow xx = xyxy \Rightarrow x = yxy$ (1)
 Din $y^2 = (xy)^2 \Rightarrow yy = xyxy \Rightarrow y = xyx$ (2)
 Din (1) și (2) $\Rightarrow xy = xyxyxyx \Rightarrow xy = y(xy)^2x \Rightarrow xy = yy^2x \Rightarrow xy = y^3x$ și folosind (1)
 $\Rightarrow xy = y^3(yxy) \Rightarrow xy = y^4xy \Rightarrow x = y^4x \Rightarrow e = y^4$ (3) 3 puncte
 $\Rightarrow y^{2013} = (y^4)^{503} \cdot y = e \cdot y = y$ 1 punct
 Din (1) și (2) $\Rightarrow yx = xyxyxy \Rightarrow yx = (xy)^2xy \Rightarrow yx = x^2xy \Rightarrow yx = x^3y$ și folosind (1)
 $\Rightarrow yx = x^3(xy) \Rightarrow yx = x^4yx \Rightarrow y = x^4y \Rightarrow e = x^4$ 1 punct
 $\Rightarrow x^{2013} = (x^4)^{503} \cdot x = e \cdot x = x$ (4)
 b) Din (3) și (4) $\Rightarrow x^{2013}y^{2013} = xy$ 1 punct
 c) Folosind ipoteza avem: $(xy)^{2012} = [(xy)^2]^{1006} = (x^2)^{1006} = (x^4)^{503} = e^{503} = e$ 1 punct

III.

- a) Verificare 3 puncte
 b) Descompune integrala în $I = \int \frac{(x + \sqrt{x})(x - \sqrt{x})}{(x - \sqrt{x})^2} e^x dx - \int \frac{\sqrt{x}}{(x - \sqrt{x})^2} e^x dx$ 1 punct
 Integrează prin parti 1 punct
 Finalizare 2 puncte

IV.

- a) Calculează integrand prin parti pentru $k \in \{1, 2\}$ 4 puncte
 b) Aplica inegalitatea Cauchy-Schwarz, forma integrala 3 puncte