



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – Constanța, 23.02.2014

Clasa a XII-a

Subiectul I

Determinați primitivele funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{\ln x - 1} \cdot \ln^3 x$.

Cristina Homentcovschi

Subiectul II

Determinați $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, f derivabilă, știind că f admite o primitivă $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, cu proprietatea că

$$F(x) = \frac{xf(x)}{2}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

Subiectul III

Fie (G, \cdot) un grup și $f, g : G \rightarrow G$, $f(x) = x^3$, $g(x) = x^6$. Să se arate că dacă f și g sunt morfisme și cel puțin unul este surjectiv, atunci (G, \cdot) este grup abelian.

Cătălin Zîrnă

Subiectul IV

Fie (G, \cdot) un grup care are exact 3 elemente de ordin 2. Demonstrați că (G, \cdot) conține un subgrup izomorf cu grupul lui Klein sau cu grupul S_3 al permutărilor de ordin 3.

Nelu Chichirim

Notă:

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7

Nu se acordă puncte din oficiu

Clasa a XII-a
Barem

Subiectul I

Fie $I = \int x^{\ln x - 1} \cdot \ln^3 x dx$, $x \in (0, \infty)$. Cu schimbarea de variabilă $x = e^t$ **2 p**

se obține $I_1 = \int (e^t)^{t-1} \cdot t^3 \cdot e^t dt = \int e^{t^2} \cdot t^3 dt = \frac{1}{2} \int (e^{t^2} \cdot 2t) \cdot t^2 dt = \frac{1}{2} \int (e^{t^2}) \cdot t^2 dt$ **2 p**

Integrând prin părți, $I_1 = \frac{1}{2} e^{t^2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \int e^{t^2} \cdot 2t dt = \frac{1}{2} e^{t^2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \int (e^{t^2}) dt = \frac{1}{2} e^{t^2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} e^{t^2} + \zeta$. **2 p**

Rezultă $I = \frac{1}{2} e^{\ln^2 x} \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} e^{\ln^2 x} + \zeta = \frac{1}{2} x^{\ln x} \cdot \ln^2 x - \frac{1}{2} x^{\ln x} + \zeta$, $x \in (0, \infty)$ **1p**

Subiectul II

Deoarece F este primitiva lui f , $f(x) = F'(x) = \frac{f(x) + xf'(x)}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Rezultă că $2f(x) = f(x) + xf'(x)$, de unde $f(x) - xf'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ **2 p**

Dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $\frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = 0$, adică $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ **2 p**

Rezultă că există $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, astfel încât $\frac{f(x)}{x} = c_1, \forall x < 0$ și $\frac{f(x)}{x} = c_2, \forall x > 0$.

Atunci $f(x) = \begin{cases} c_1 x, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ c_2 x, & x > 0 \end{cases}$ **2 p**

Din condițiile ca f să fie continuă și derivabilă pe \mathbf{R} , rezultă $c_1 = c_2 = c \in \mathbf{R}$ și $a = 0$.

Atunci $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbf{R}$ **1 p**

Subiectul III

$f, g : G \rightarrow G$, f, g morfisme, rezultă $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $g(xy) = g(x) \cdot g(y) \forall x, y \in G$, de unde $(xy)^3 = x^3 y^3$, $(xy)^6 = x^6 y^6$, $\forall x, y \in G$.

$(xy)^6 = [(xy)^3]^2 = (x^3 y^3)^2$, rezultă $x^6 y^6 = x^3 y^3 x^3 y^3$, $\forall x, y \in G$ de unde $x^3 y^3 = y^3 x^3$, $\forall x, y \in G$ (1).
..... **2p**

Pe de altă parte, $x^6 y^6 = x^3 x^3 y^3 y^3 = x^3 y^3 x^3 y^3 = y^3 x^3 y^3 x^3 = y^3 y^3 x^3 x^3 = y^6 x^6$. Rezultă de aici că $x^6 y^6 = y^6 x^6 \forall x, y \in G$ (2). **2p**

Să presupunem acum că f este o aplicație surjectivă. Atunci, pentru orice $a, b \in G$, există $x, y \in G$, astfel încât $a = x^3$ și $b = y^3$. Folosind relația (1), se obține că $ab = x^3 y^3 = y^3 x^3 = ba$, de unde rezultă că (G, \cdot) este grup abelian..... **2p**

Analog, dacă g este surjectivă, folosind relația (2), se arată că (G, \cdot) este grup abelian..... **1p**

Subiectul IV

Notăm cu a, b, c cele 3 elemente de ordin 2 ale grupului și cu e elementul neutru.

Distingem 2 cazuri: $ab = ba$ și $ab \neq ba$.

I) $ab = ba \Rightarrow$ ordinul lui ab este 2..... **1p**

deci $H = \{e, a, b, ab\}$ este un subgrup al lui G **1p**

izomorf cu grupul lui Klein.....**1p**

II) $ab \neq ba \Rightarrow aba$ nu aparține mulțimii $\{e, a, b\}$ și ordinul lui aba este $2 \Rightarrow aba=c$ **1p**

Analog $bab=c$, deci $aba=bab$**1p**

de unde printr-un calcul simplu deducem că ordinul lui ab este 3 **1p**

Considerand multimea $H=\{e, a, b, aba, ab, (ab)^2\}$ și ținând cont de proprietățile lui a și b ($a^2 = b^2 = e$ și $aba=bab$) deducem că H este un subgrup a lui G izomorf cu S_3 .

$S_3 = \{e, \sigma, \tau, \sigma\tau\sigma, \sigma\tau, (\sigma\tau)^2\}$ unde e este permutarea identică, σ este transpoziția (1,2) și τ este transpoziția (2,3).....**1p**