

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VI – a

1. Calculați

(4 p) a) $(2^{2013} + 2^{2014} + 2^{2015}) : (2^{2014} - 2^{2011})$

(3 p) b) Media aritmetică a numerelor a și b , știind că

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2014}$$

$$b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2013}{2014}.$$

2. (3 p) a) Arătați că $a \cdot \overline{aaa} + b \cdot \overline{bbb} + c \cdot \overline{ccc}$ este divizibil cu 37.(4 p) b) Determinați \overline{abc} , știind că $a^2 + b^2 = c^2$ și a, b, c - distincte.3. Pe o dreaptă se consideră punctele $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{10}$, în această ordine, astfel încât A_1 să fie mijlocul lui $[A_0A_2]$, A_2 mijlocul lui $[A_0A_3]$ și așa mai departe, până la A_9 mijlocul lui $[A_0A_{10}]$. Știind că $A_0A_1 = 2$ cm, determinați:(3 p) a) lungimea segmentului A_9A_{10} ;(4 p) b) lungimea laturii triunghiului echilateral care s-ar putea confecționa dintr-o buclă de sârmă cu lungimea egală cu $(A_0A_{10} - 1)$ cm.4. (7 p) Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ neadiacente suplementare, astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = \frac{3}{5}$ din $m(\sphericalangle AOB)$. Dacă D este simetricul punctului A față de O și E un punct astfel încât (OB este bisectoarea $\sphericalangle EOC$, arătați că E se află pe dreapta AD).

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii,

Timp de lucru : 2 ore

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 p.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

OLIMPIADA DE MATEMATICA

FAZA LOCALĂ

15.02.2014

Clasa a VI – a

1. a) $[2^{2013} \cdot (1 + 2^1 + 2^2)] : [2^{2011} \cdot (2^3 - 1)] = (2^{2013} \cdot 7) : (2^{2011} \cdot 7)$ (3 p)
Finalizare $(2^{2013} \cdot 7) : (2^{2011} \cdot 7) = 2^2 = 4$ (1 p)

b) $a + b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2014} + \frac{2013}{2014}\right) = 1 \cdot 2013 = 2013$
 $m_a = \frac{a+b}{2} = 2013 : 2 = 1006,5$ (3 p)

2. a) $a \cdot 111 \cdot a + b \cdot 111 \cdot b + c \cdot 111 \cdot c = 111 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 3 \cdot 37 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$
Rezultă că numărul este divizibil cu 37. (3 p)

b) $a^2 + b^2 = c^2$ și a, b, c cifre, $a \neq 0, a \neq b, a \neq c, b \neq c$.

Dacă $a = 1, b = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ numărul 101 - NU

Dacă $a = 3, b = 4 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow$ numărul 345 - DA

Dacă $a = 2 \Rightarrow 4 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 - b^2 = 4$ (3 p)

Pătratele perfecte ale cifrelor de la 1 la 9 sunt $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ și nu există două pătrate perfecte a căror diferență să fie 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 sau 81

Singurele soluții sunt 345 și 435. (3 p)

3. a) $A_0A_1 = A_1A_2 = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_0A_2 = 2 \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$

$$A_2A_3 = A_0A_2 = 4 \text{ cm} \Rightarrow A_0A_3 = 2 \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm} = 2^3 \text{ cm}$$

$$A_3A_4 = A_0A_3 = 8 \text{ cm} \Rightarrow A_0A_4 = 2 \cdot 8 \text{ cm} = 16 \text{ cm} = 2^4 \text{ cm} \Rightarrow A_4A_5 = 2^4 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \dots A_9A_{10} = 2^9 \text{ cm} \quad (3 \text{ p})$$

b) $A_0A_{10} = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_9A_{10} = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 =$

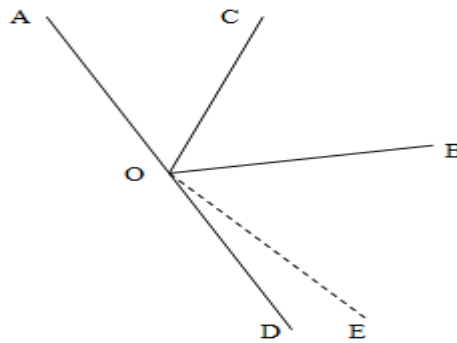
$$2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 = 2^3 + 2^3 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 = 2^{10} \quad (2 \text{ p})$$

$$A_0A_{10} - 1 = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023 : 3 \quad (1 \text{ p})$$

lungimea laturii triunghiului echilateral este $1023 : 3 = 341 \text{ cm}$ (1 p)

4. Desen

(1 p)



$$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) + \frac{3}{5}m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\frac{8}{5}m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 112^\circ 30'$$

$$m(\sphericalangle AOB) = 112^\circ 30' \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 67^\circ 30' \quad (2 \text{ p})$$

$$(OB \text{ bisectoarea } \sphericalangle EOC \Rightarrow m(\sphericalangle COB) = m(\sphericalangle BOE) = 67^\circ 30' \quad (1 \text{ p}))$$

$$A \text{ și } D \text{ simetrice față de } O \Rightarrow m(\sphericalangle AOD) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = 180^\circ - m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ - 112^\circ 30' = 67^\circ 30' \quad (2 \text{ p})$$

Dar $m(\sphericalangle BOE) = 67^\circ 30'$, deci $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle BOE)$ iar $(OD$ și $(OE$ sunt în același semiplan față de $(OB$ (1p)