INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală februarie 2016
SUBIECT si BAREM Clasa a IX-a

PROBLEMA 1
Să se determine numerele reale strict positive $a_1, a_2, \dots, a_n$, cu $a_1 = 1$, pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\frac{1}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n+a_{n+1}}=a_{n+1}-1, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Barem de notare:
$n=1 \Longrightarrow \frac{1}{1+a_2}=a_2-1 \Longrightarrow a_2=\sqrt{2}$...1p
$n=2 \Longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+a_3}=a_3-1 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+a_3}=a_3-\sqrt{2} \Longrightarrow a_3=\sqrt{3}$ 1p
Presupunem $a_k=\sqrt{k}$ şi demonstrăm că $a_{k+1}=\sqrt{k+1}$ 2p
Din ipoteză avem $a_k-1+\frac{1}{a_k+a_{k+1}}=a_{k+1}-1 \Longrightarrow a_{k+1}^2=a_k^2+1$ 1p
$a_{k+1}=\sqrt{a_k^2+1}=\sqrt{k+1}$. 1p
În concluzie $a_n=\sqrt{n}$, pentru orice n număr natural nenul. 1p

PROBLEMA 2 Fie M, N, P mijloacele laturilor unui triunghi ABC, G centrul său de greutate şi O un punct în planul triunghiului. Să se arate că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG}$ şi $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$.

Barem de notare:
Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ ……………………………………………………2p
G este centrul de greutate al triunghiului MNP atunci
$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OG}$ …………………………………………………...2p
Pentru partea a doua a problemei avem
$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OG})+(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OG})=$
$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}$ …………………………………………………..3p

PROBLEMA 3
Să se rezolve pe mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{3x-1}{4}\right]+\left[\frac{3x+1}{4}\right]=0$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

Barem de notare:

Notăm $\frac{3x-1}{4}=t \Rightarrow \frac{3x+1}{4}=\frac{3x-1}{4}+\frac{1}{2}=t+\frac{1}{2}$ ....1 p

Înlocuind în ecuație, obținem

$$[t]+\left[t+\frac{1}{2}\right]=0$$ ....1 p

ținând cont de relația lui Hermite: $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ ....2 p

ecuația devine:

$[2t]=0$, de unde $2t\in[0,1)\Rightarrow t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ ....2 p

adică $\frac{3x-1}{4}\in\left[0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 0\le\frac{3x-1}{4}<\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},1\right)$ ....1 p

PROBLEMA 4

Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$(xy-7)^2=x^2+y^2.$$

G.M. 4/2015

Barem de notare:

Ecuaţia se scrie succesiv:

$x^2y^2-14xy+49=x^2+y^2 \Leftrightarrow x^2y^2-12xy+36+13=x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow$

$(xy-6)^2+13=(x+y)^2$ ....3 p

Notând $x+y=a$ şi $xy-6=b$, avem

$b^2+13=a^2 \Leftrightarrow a^2-b^2=13 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=13$ ....2 p

Pe mulţimea numerelor întregi sunt posibile cazurile:

(1) $\begin{cases}a-b=1\\a+b=13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=7\\b=6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=7\\xy=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$ sau $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

(2) $\begin{cases}a-b=-1\\a+b=-13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-7\\b=-6\end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(0,-7);(-7,0)\}$

(3) $\begin{cases}a-b=13\\a+b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=7\\b=-6\end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(0,7);(7,0)\}$

(4) $\begin{cases}a-b=-13\\a+b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-7\\b=6\end{cases} \Rightarrow (x,y)\in\{(-3,-4);(-4,-3)\}$ ....2 p